

No. of Printed Pages : 8

MTE-09

BACHELOR'S DEGREE PROGRAMME (BDP)**Term-End Examination****December, 2014****ELECTIVE COURSE : MATHEMATICS****MTE-09 : REAL ANALYSIS***Time : 2 hours**Maximum Marks : 50**(Weightage : 70%)*

Note : Attempt five questions in all. Question no. 1 is compulsory. Do any four questions out of questions no. 2 to 7.

1. Which of the following statements are true or false ? Give reasons for your answer. 10
- (a) The function $f(x) = 3x^2 + 5|x|$ is differentiable at $x = -2$.
- (b) The singleton set $\{x\}$ for any $x \in \mathbf{R}$ is an open set.
- (c) Every bounded sequence is convergent.
- (d) Every integrable function is monotonic.
- (e) The function $f(x) = \cos x$ is uniformly continuous on $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

2. (a) Find the sum of the series

$$\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n^3}} + \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{(n+3)^3}} + \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{(n+6)^3}} + \dots + \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{[n+3(n-1)]^3}} \quad 3$$

- (b) By showing that the remainder after n -terms tends to zero, find Maclaurin's series expansion of $\sin 2x$. 5

- (c) Prove that the function f defined on $[0, 1]$ by $f(x) = (-1)^{n+1}$ for $\frac{1}{n+1} < x \leq \frac{1}{n}$, $n = 1, 2, 3, \dots$ is integrable on $[0, 1]$. 2

3. (a) Find the values of a and b so that

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 + a \cos x)x - b \sin x}{x^3} = 1 \quad 4$$

- (b) Test for convergence the following series : 6

(i) $\frac{1.2}{3^2 \cdot 4^2} + \frac{3.4}{5^2 \cdot 6^2} + \frac{5.6}{7^2 \cdot 8^2} + \dots$

(ii) $\sum \frac{\sqrt{n^4 + 1} - \sqrt{n^4 - 1}}{n}$

4. (a) Prove that a bounded function f is integrable on $[a, b]$ if for each $\varepsilon > 0$, \exists a partition P of $[a, b]$ such that

$$U(P, f) - L(P, f) < \varepsilon \quad 3$$

- (b) Prove that the function $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ is not uniformly continuous on $]0, 1]$. 4

- (c) State Weierstrass M-test and apply it to

show that
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{10}{n^4 + x^4}$$
 converges

uniformly for all $x \in \mathbf{R}$. 3

5. (a) Let $\{a_n\}$ be a sequence defined as

$$a_1 = 2, a_{n+1} = \frac{1}{3} a_n$$

Show that $\{a_n\}$ is convergent to zero. 3

- (b) Prove that the intersection of two open sets is an open set. Give an example to show that intersection of an infinite number of open sets need not be an open set. 4

- (c) Represent the number $2 + \sqrt{3}$ on the real line. 3

6. (a) State Cauchy Mean Value Theorem and verify it for the functions

$$f(x) = x, \quad g(x) = \frac{1}{x}, \quad x \in [1, 4]. \quad 4$$

- (b) If a sequence $\{S_n\}$ converges to s , then prove that $\{|S_n|\}$ converges to $|s|$. Is the converse true? Justify. 4

- (c) Prove that the set of integers is countable. 2

7. (a) Show that the Local Maximum Value of

$$\left(\frac{1}{x}\right)^x \text{ is } e^{1/e}. \quad 4$$

- (b) Prove that the function f defined by

$$f(x) = \begin{cases} 4, & \text{if } x \text{ is rational} \\ -4, & \text{if } x \text{ is irrational} \end{cases}$$

is discontinuous at each real number, using sequential definition of the continuity. 4

- (c) Check whether the function

$$f(x) = x \ln x, \quad x > 1$$

is one-one or not. 2

स्नातक उपाधि कार्यक्रम (बी.डी.पी.)

सत्रांत परीक्षा

दिसम्बर, 2014

ऐच्छिक पाठ्यक्रम : गणित

एम.टी.ई.-09 : वास्तविक विश्लेषण

समय : 2 घण्टे

अधिकतम अंक : 50

(कुल का : 70%)

नोट : कुल पाँच प्रश्नों के उत्तर दीजिए । प्रश्न सं. 1 अनिवार्य है ।
प्रश्न सं. 2 से 7 में से किन्हीं चार प्रश्नों के उत्तर दीजिए ।

1. निम्नलिखित में से कौन-से कथन सत्य हैं और कौन-से असत्य ? अपने उत्तर के कारण दीजिए । 10

(क) फलन $f(x) = 3x^2 + 5|x|$ बिन्दु $x = -2$ पर अवकलनीय है ।

(ख) एकल समुच्चय $\{x\}$, प्रत्येक $x \in \mathbf{R}$ के लिए विवृत्त समुच्चय है ।

(ग) प्रत्येक परिबद्ध अनुक्रम अभिसारी होता है ।

(घ) प्रत्येक समाकलनीय फलन एकदिष्ट होता है ।

(ङ) फलन $f(x) = \cos x$, $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ पर एकसमान संतत है ।

2. (क) श्रेणी

$$\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n^3}} + \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{(n+3)^3}} + \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{(n+6)^3}} + \dots + \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{[n+3(n-1)]^3}}$$

का योगफल ज्ञात कीजिए । 3

(ख) यह दिखाते हुए कि n -पदों के बाद अवशेष शून्य की ओर प्रवृत्त होता है, $\sin 2x$ का मैक्लॉरिन श्रेणी प्रसार ज्ञात कीजिए । 5

(ग) सिद्ध कीजिए कि

$$f(x) = (-1)^{n+1}, \frac{1}{n+1} < x \leq \frac{1}{n} \text{ के लिए,}$$

$n = 1, 2, 3, \dots$ द्वारा $[0, 1]$ पर परिभाषित फलन f , $[0, 1]$ पर समाकलनीय है । 2

3. (क) a और b के मान ज्ञात कीजिए ताकि

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 + a \cos x)x - b \sin x}{x^3} = 1 \quad 4$$

(ख) निम्नलिखित श्रेणियों के अभिसरण का परीक्षण कीजिए : 6

$$(i) \frac{1.2}{3^2 \cdot 4^2} + \frac{3.4}{5^2 \cdot 6^2} + \frac{5.6}{7^2 \cdot 8^2} + \dots$$

$$(ii) \sum \frac{\sqrt{n^4 + 1} - \sqrt{n^4 - 1}}{n}$$

4. (क) सिद्ध कीजिए कि परिबद्ध फलन f , $[a, b]$ पर समाकलनीय होगा यदि प्रत्येक $\varepsilon > 0$ के संगत, $[a, b]$ का एक ऐसा विभाजन P होता है कि

$$U(P, f) - L(P, f) < \varepsilon \quad 3$$

- (ख) सिद्ध कीजिए कि फलन $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$, $]0, 1]$ पर एकसमान संतत नहीं है। 4

- (ग) वायस्ट्रास M -परीक्षण का कथन दीजिए और इसे लागू करके दिखाइए कि सभी $x \in \mathbb{R}$ के लिए

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{10}{n^4 + x^4} \text{ एकसमान अभिसरित होती है।} \quad 3$$

5. (क) मान लीजिए कि अनुक्रम $\{a_n\}$ निम्न प्रकार परिभाषित है :

$$a_1 = 2, a_{n+1} = \frac{1}{3} a_n$$

दिखाइए कि $\{a_n\}$ शून्य की ओर अभिसरित होता है। 3

- (ख) सिद्ध कीजिए कि दो विवृत्त समुच्चयों का सर्वनिष्ठ भी विवृत्त समुच्चय होता है। यह दिखाने के लिए एक उदाहरण दीजिए कि असंख्य विवृत्त समुच्चयों का सर्वनिष्ठ विवृत्त समुच्चय होना ज़रूरी नहीं है। 4

- (ग) संख्या $2 + \sqrt{3}$ को वास्तविक रेखा पर निरूपित कीजिए। 3

6. (क) कौशी मध्य मान प्रमेय का कथन दीजिए और नीचे दिए गए फलनों के लिए इसे सत्यापित कीजिए :

$$f(x) = x, \quad g(x) = \frac{1}{x}, \quad x \in [1, 4] \quad 4$$

- (ख) यदि अनुक्रम $\{S_n\}$, s की ओर अभिसरित होता है, तो सिद्ध कीजिए कि $\{|S_n|\}$, $|s|$ की ओर अभिसरित होगा। क्या इसका विलोम भी सत्य है? पुष्टि कीजिए। 4
- (ग) सिद्ध कीजिए कि पूर्णाकों का समुच्चय गणनीय है। 2

7. (क) दर्शाइए कि $\left(\frac{1}{x}\right)^x$ का स्थानीय उच्चिष्ठ मान $e^{1/e}$ है। 4

- (ख) सांतत्य की अनुक्रमिक परिभाषा का प्रयोग करते हुए, सिद्ध कीजिए कि

$$f(x) = \begin{cases} 4, & \text{यदि } x \text{ परिमेय है} \\ -4, & \text{यदि } x \text{ अपरिमेय है} \end{cases}$$

द्वारा परिभाषित फलन f प्रत्येक वास्तविक संख्या पर असंतत है। 4

- (ग) जाँच कीजिए कि फलन

$$f(x) = x \ln x, \quad x > 1$$

एकैकी है या नहीं। 2