

**BACHELOR'S DEGREE PROGRAMME****MTE-04 : ELEMENTARY ALGEBRA****&****MTE-05 : ANALYTICAL GEOMETRY****Instructions :**

1. *Students registered for both MTE-04 & MTE-05 courses should answer both the question papers in two separate answer books entering their enrolment number, course code and course title clearly on both the answer books.*
2. *Students who have registered for MTE-04 or MTE-05 should answer the relevant question paper after entering their enrolment number, course code and course title on the answer book.*

**स्नातक उपाधि कार्यक्रम****एम.टी.ई.-04 : प्रारंभिक बीजगणित****एवं****एम.टी.ई.-05 : वैश्लेषिक ज्यामिति****निर्देश :**

1. जो छात्र एम.टी.ई.-04 और एम.टी.ई.-05 दोनों पाठ्यक्रमों के लिए पंजीकृत हैं, दोनों प्रश्न-पत्रों के उत्तर अलग-अलग उत्तर पुस्तिकाओं में अपना अनुक्रमांक, पाठ्यक्रम कोड तथा पाठ्यक्रम नाम साफ़-साफ़ लिखकर दें।
2. जो छात्र एम.टी.ई.-04 या एम.टी.ई.-05 किसी एक के लिए पंजीकृत हैं, अपने उसी प्रश्न-पत्र के उत्तर उत्तर-पुस्तिका में अपना अनुक्रमांक, पाठ्यक्रम कोड तथा पाठ्यक्रम नाम साफ़-साफ़ लिखकर दें।

**BACHELOR'S DEGREE PROGRAMME**  
**Term-End Examination**  
**December, 2014**

**MATHEMATICS**  
**MTE-04 : ELEMENTARY ALGEBRA**

Time :  $1\frac{1}{2}$  hours

Maximum Marks : 25

(Weightage : 70%)

---

*Note : Question no. 1 is compulsory. Attempt any three questions from Q. No. 2 to 5. Use of calculators is not allowed.*

---

1. Which of the following statements are true and which are false ? Justify your answer giving valid proof or counterexample. 10
- (a)  $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$  for subsets A, B, C of a set U.
- (b) A fourth degree equation with real coefficients has a real root.
- (c)  $\frac{1}{x - iy} = x + iy$  for any real numbers x and y (at least one of them non-zero) and  $i = \sqrt{-1}$ .
- (d)  $\sqrt{3}$  is a rational number.
- (e) Any system of two linear equations in two unknowns has finite number of solutions.

2. (a) Apply De Moivre's theorem to express  $\cos 4\theta$  in terms of powers of  $\cos \theta$ . 3

(b) Prove that a real non-zero cube root of a positive real number is unique. 2

3. (a) Check if the following system of linear equations can be solved by Cramer's rule :

$$3x + y - 2z = -7$$

$$5x - 3y + 2z = 5$$

$$9x - 11y + 10z = 29$$

Obtain the solution. 3

(b) Show that  $n^n > 1.3.5 \dots (2n - 1)$ . 2

4. (a) If  $\alpha, \beta, \gamma$  are the roots of a cubic equation, then find the sum of the cubes of the roots, for the equation  $x^3 - 4x^2 + 6x - 8 = 0$ . 2

(b) Prove by induction that the product of any three consecutive natural numbers is divisible by 3. 3

5. (a) Show that

$$\begin{vmatrix} 1 & a & a^3 \\ 1 & b & b^3 \\ 1 & c & c^3 \end{vmatrix} = (a - b)(b - c)(c - a)(a + b + c). \quad 3$$

(b) For any subsets A, B, C of a set U, prove the following : 2

$$(A \cap B) \times C = (A \times C) \cap (B \times C)$$

स्नातक उपाधि कार्यक्रम  
सत्रांत परीक्षा  
दिसम्बर, 2014

गणित

एम.टी.ई.-04 : प्रारंभिक बीजगणित

समय :  $1\frac{1}{2}$  घण्टे

अधिकतम अंक : 25

(कुल का : 70%)

नोट : प्रश्न सं. 1 करना अनिवार्य है। प्रश्न सं. 2 से 5 में से कोई तीन प्रश्नों को हल कीजिए। कैल्कुलेटर्स के प्रयोग की अनुमति नहीं है।

1. निम्नलिखित में से कौन-से कथन सत्य हैं और कौन-से असत्य ? वैध उपपत्ति या प्रति-उदाहरण देते हुए अपने उत्तर की पुष्टि कीजिए।

10

(क) समुच्चय  $U$  के उप-समुच्चयों  $A, B, C$  के लिए

$$A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C).$$

(ख) वास्तविक गुणांक वाले घात 4 के समीकरण का एक वास्तविक मूल होता है।

(ग) किसी भी वास्तविक संख्या  $x$  और  $y$  (कम-से-कम दोनों में से एक शून्य नहीं हो) और  $i = \sqrt{-1}$  के लिए

$$\frac{1}{x - iy} = x + iy.$$

(घ)  $\sqrt{3}$  एक परिमेय संख्या है।

(ङ) दो अज्ञात राशियों में किसी भी दो रैखिक समीकरणों के निकाय के हलों की संख्या परिमित होती है।

2. (क) द मॉयवर प्रमेय को लागू करके  $\cos 4\theta$  को  $\cos \theta$  की घात के पदों में व्यक्त कीजिए । 3

(ख) सिद्ध कीजिए कि धनात्मक वास्तविक संख्या का वास्तविक शून्येतर घन मूल अद्वितीय होता है । 2

3. (क) जाँच कीजिए कि क्या निम्नलिखित रैखिक समीकरण निकाय को क्रैमर नियम से हल किया जा सकता है :

$$3x + y - 2z = -7$$

$$5x - 3y + 2z = 5$$

$$9x - 11y + 10z = 29$$

इसका हल प्राप्त कीजिए । 3

(ख) दिखाइए कि  $n^n > 1.3.5 \dots (2n - 1)$ . 2

4. (क) यदि  $\alpha, \beta, \gamma$  त्रिघात समीकरण के मूल हैं, तब निम्नलिखित समीकरण के लिए मूलों के घनों का योगफल ज्ञात कीजिए :

$$x^3 - 4x^2 + 6x - 8 = 0$$
 2

(ख) आगमन से सिद्ध कीजिए कि किन्हीं तीन क्रमागत प्राकृतिक संख्याओं का गुणनफल 3 से विभाजित होता है । 3

5. (क) दिखाइए कि

$$\begin{vmatrix} 1 & a & a^3 \\ 1 & b & b^3 \\ 1 & c & c^3 \end{vmatrix} = (a - b)(b - c)(c - a)(a + b + c).$$
 3

(ख) समुच्चय  $U$  के किन्हीं उपसमुच्चयों  $A, B, C$  के लिए, निम्नलिखित को सिद्ध कीजिए : 2

$$(A \cap B) \times C = (A \times C) \cap (B \times C)$$

**BACHELOR'S DEGREE PROGRAMME  
(BDP)**

**Term-End Examination  
December, 2014**

**ELECTIVE COURSE : MATHEMATICS  
MTE-05 : ANALYTICAL GEOMETRY**

*Time :  $1\frac{1}{2}$  hours*

*Maximum Marks : 25*

*(Weightage : 70%)*

*Note : Question no. 5 is compulsory. Answer any three questions from question no. 1 to 4. Use of calculators is not allowed.*

1. (a) Find the equation of the conic section with eccentricity 1,  $(1, 0)$  as its focus and  $y = x$  as its directrix. 2
- (b) Trace the surface  $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{25} + \frac{z^2}{4} = 1$ . Describe its sections by the planes  $z = \pm 4$ . 3
2. (a) A circle cuts the parabola  $y^2 = 4ax$  in the points  $(at_i^2, 2at_i)$  for  $i = 1, 2, 3, 4$ . Prove that  $t_1 + t_2 + t_3 + t_4 = 0$ . 2
- (b) Show that if the sum of the squares of the distances of  $(a, b, c)$  from the planes  $x + y + z = 0$ ,  $x = z$  and  $x + z = 2y$  is 3, then  $a^2 + b^2 + c^2 = 3$ . 3

3. (a) Find the equation of the cylinder whose axis is  $x = y = -z$  and radius is 2. 2

(b) Find the equation of the line parallel to  $y + x + 1 = 0$  and passing through (1, 1). What is the angle between the line obtained and  $2x = y$ ? 3

4. (a) Show that the conicoid

$$3x^2 + 7y^2 + 3z^2 + 10yz - 2zx + 10xy + 4x - 12y - 4z + 1 = 0$$

has a centre, and find the centre. 3

(b) Find the equation of a right circular cone with vertex at O, axis at OX and semi-vertical angle  $\frac{\pi}{3}$ . What will be its new equation when the origin is shifted to (0, 1, -1)? 2

5. Are the following statements *true* or *false*? Justify your answer. 10

(a) The relation between the cartesian and the polar co-ordinates is  $x = r \sin \theta$ ,  $y = r \cos \theta$  and  $\theta = \tan^{-1} \frac{y}{x}$ .

(b) The conditions on  $m$  and  $c$ , so that  $y = mx + c$  will be a tangent to  $x^2 = 4ay$  are  $m \neq \tan \frac{\pi}{2}$  and  $c = -am^2$ .

(c) The line  $\frac{x}{2} = y = \frac{z}{3}$  is parallel to the x-axis.

(d) If  $s \equiv \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} - 1 = 0$  and  $s_1 \equiv xy - 9 = 0$ , then the condition on  $k$  for which  $s + ks_1 = 0$  will be an ellipse is  $k^2 < \frac{1}{9}$ .

(e) The condition for a line with direction ratios  $\alpha, \beta, \gamma$  to be a tangent to the central conicoid  $ax^2 + by^2 = 2z$  at  $(x_0, y_0, z_0)$  is  $ax_0\alpha - by_0\beta = \gamma$ .

---



स्नातक उपाधि कार्यक्रम  
(बी.डी.पी.)  
सत्रांत परीक्षा  
दिसम्बर, 2014

ऐच्छिक पाठ्यक्रम : गणित  
एम.टी.ई.-05 : वैश्लेषिक ज्यामिति

समय :  $1\frac{1}{2}$  घण्टे

अधिकतम अंक : 25  
(कुल का : 70%)

नोट : प्रश्न सं. 5 करना अनिवार्य है। प्रश्न सं. 1 से 4 में से किन्हीं तीन प्रश्नों के उत्तर दीजिए। कैल्कुलेटरो के प्रयोग की अनुमति नहीं है।

1. (क) उत्केन्द्रता 1, नाभि (1, 0) तथा उसकी नियता  $y = x$  वाले शांकव परिच्छेद का समीकरण ज्ञात कीजिए। 2
- (ख) पृष्ठ  $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{25} + \frac{z^2}{4} = 1$  को अनुरेखित कीजिए। समतलों  $z = \pm 4$  द्वारा इसके परिच्छेदों का विवरण दीजिए। 3
2. (क) एक वृत्त परवलय  $y^2 = 4ax$  को बिन्दुओं  $(at_i^2, 2at_i)$ , जहाँ  $i = 1, 2, 3, 4$  है, पर प्रतिच्छेद करता है। सिद्ध कीजिए कि  $t_1 + t_2 + t_3 + t_4 = 0$ । 2
- (ख) यदि बिन्दु  $(a, b, c)$  की समतलों  $x + y + z = 0$ ,  $x = z$  और  $x + z = 2y$  से दूरियों के वर्गों का योगफल 3 है, तो दिखाइए कि  $a^2 + b^2 + c^2 = 3$  है। 3

3. (क) उस बेलन का समीकरण ज्ञात कीजिए जिसका अक्ष  $x = y = -z$  तथा त्रिज्या 2 है । 2

(ख)  $y + x + 1 = 0$  के समान्तर तथा  $(1, 1)$  से गुजरने वाली रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए । प्राप्त रेखा और  $2x = y$  के बीच का कोण क्या है ? 3

4. (क) दिखाइए कि शांकवज  $3x^2 + 7y^2 + 3z^2 + 10yz - 2zx + 10xy + 4x - 12y - 4z + 1 = 0$  का केन्द्र है, तथा केन्द्र ज्ञात कीजिए । 3

(ख) शीर्ष O, अक्ष OX तथा अर्ध-शीर्ष कोण  $\frac{\pi}{3}$  वाले लंब-वृत्तीय शंकु का समीकरण ज्ञात कीजिए । यदि मूल-बिन्दु को  $(0, 1, -1)$  पर विस्थापित कर दिया जाए, तो इसका नया समीकरण क्या होगा ? 2

5. क्या निम्नलिखित कथन सत्य हैं अथवा असत्य ? अपने उत्तर की पुष्टि कीजिए । 10

(क) कार्तीय तथा ध्रुवीय निर्देशांकों के बीच सम्बन्ध  $x = r \sin \theta$ ,  $y = r \cos \theta$  और  $\theta = \tan^{-1} \frac{y}{x}$  है ।

(ख)  $y = mx + c$  के  $x^2 = 4ay$  की स्पर्श रेखा होने के लिए  $m$  तथा  $c$  पर प्रतिबंध  $m \neq \tan \frac{\pi}{2}$  और  $c = -am^2$  हैं ।

(ग) रेखा  $\frac{x}{2} = y = \frac{z}{3}$ , x-अक्ष के समान्तर है ।

(घ) यदि  $s \equiv \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} - 1 = 0$  और  $s_1 \equiv xy - 9 = 0$  है, तो  $s + ks_1 = 0$  एक दीर्घवृत्त होगा यदि  $k$  पर प्रतिबंध  $k^2 < \frac{1}{9}$  है।

(ङ) दिक्-अनुपातों  $\alpha, \beta, \gamma$  वाली रेखा के केन्द्रीय शांकवज  $ax^2 + by^2 = 2z$  की बिन्दु  $(x_0, y_0, z_0)$  पर स्पर्श रेखा होने के लिए प्रतिबंध  $ax_0\alpha - by_0\beta = \gamma$  है।

---