No. of Printed Pages : 8

PHE-14

00580

BACHELOR OF SCIENCE (B.Sc.)

Term-End Examination

December, 2012

PHYSICS

PHE-14 : MATHEMATICAL METHODS IN PHYSICS-III

Time : 2 hours *Maximum Marks : 50*

Note : *Attempt **all** questions. The marks for each question are indicated against it. Symbols have their usual meanings.*

---

1. Attempt **any five** parts : **2x5=10**

(a) Define a unitary matrix. Verify that

$$\sigma = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ is unitary.}$$

(b) If the Fourier transform of $f(x)$ is $g(k)$, show that the Fourier transform of $\frac{df}{dx}$ is ik $g(k)$, provided all integrated parts vanish at $x \to \pm \infty$.

(c) Determine whether the function $f(z) = e^y (\cos x + i \sin x)$ is analytic or not.

(d) Obtain the Laplace transform of the function $t^2 e^{at}$ where a is a constant.

(e) Express $f(z) = (z^*)^2$ in the form $u(x, y) + iv(x, y)$.

(f) Show that $\{1, -1\}$ is a subgroup of the multiplicative group $\{1, i, -1, -i\}$.

(g) If A^{ij} is an antisymmetric tensor and B_i is a vector, obtain the value of $A^{ij} B_i B_j$.

(summation convention assumed).

(h) The recurrence relation for the legendre polynomials $P_n(x)$ is $(2n+1)x P_n(x) = (n+1) P_{n+1}(x) + n P_{n-1}(x)$. Obtain $P_2(x)$ given that $P_0(x) = 1$ and $P_1(x) = x$.

2. Attempt **any two** parts : **5x2=10**

(a) For the matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

obtain the eigen values and the eigen vectors of A. Show that the eigen vectors are orthogonal.

(b) Prove that the eigen values of a hermitian matrix are real.

(c) Show that the set of all non-singular square matrices of order n forms a group under matrix multiplication.

Is this group Abelian ?

3. Attempt **any two** parts : **5x2=10**

(a) Using the method of residues, evaluate the integral $\oint_C \frac{e^z\, dz}{(z^2-1)}$ where C is a circle such that $z=2$, traversed counter clockwise.

(b) Locate the singularities and poles of the following function and name them :

$$\frac{\sin\left(\frac{1}{z}\right)}{z^2+2z+2}, \ m \neq 0.$$

(c) Obtain the Laurent series expansion of

$$f(z) = \frac{e^z}{(z-1)^2} \text{ about } z=1.$$

4. Attempt **any two** parts : **5x2=10**

(a) Obtain the Fourier transform of the function :

$$f(x) = \begin{cases} 1 & 0 < x < 2 \\ 0 & x > 2 \end{cases}$$

(b) Obtain the inverse Laplace transform of

$$\frac{1}{(S-1)\left(S^2+1\right)}.$$

(c) Show that the Laplace transform of the second order derivative of a function f (t) is given by $L[f''(t)] = S^2 L[f(t)] - S f'(0) - f'(0)$, $S > 0$.

5. Attempt **any one** part : 10

(a) Bessel functions of integral order $J_n(x)$ are obtained from the generating function

$$\exp\left[\frac{x}{2}\left(t - \frac{1}{t}\right)\right] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(x)\, t^n$$

Show that $\cos(x \sin\theta) = J_o(x) + 2$

$$\sum_{K=1}^{\infty} J_{2K}(x) \cos(2K\theta) \text{ and}$$

$$J_o(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \cos(x \sin\theta)\, d\theta.$$

(b) Using the generating function for the Laguerre polynomials $L_n(x)$,

$$\frac{e^{-\frac{xt}{1-t}}}{1-t} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} L_n(x)\, t^n, \ |t| < 1 \text{ derive the}$$

recurrence relation $(n+2) L_{n+2}(x) = (2n+3-x) L_{n+1}(x) - (n+1) L_n(x)$.

विज्ञान स्नातक (बी.एससी.)

सत्रांत परीक्षा

दिसम्बर, 2012

भौतिक विज्ञान

पी.एच.ई.-14 : भौतिकी में गणितीय विधियाँ-III

समय : 2 घण्टे *अधिकतम अंक : 50*

नोट : ***सभी*** *प्रश्न करें। प्रत्येक प्रश्न के अंक उसके सामने दिए गए हैं। प्रतीकों के अपने सामान्य अर्थ हैं।*

1. कोई **पाँच** भाग करें : **2x5=10**

(a) ऐकिक आव्यूह की परिभाषा लिखें। सत्यापित करें कि

$\sigma = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ एक ऐकिक आव्यूह है।

(b) अगर $f(x)$ का फ़ूरिये रूपांतर $g(k)$ है तो सिद्ध करें कि

$\frac{df}{dx}$ का फ़ूरिये रूपांतर $ik\,g(k)$ हैं, यदि सभी समाकलित

भाग $x \to \pm \infty$ पर शून्य हो जाते हैं।

(c) निर्धारित करें कि क्या फलन $f(z) = e^y(\cos x + i \sin x)$ विश्लेषिक है या नहीं।

(d) फलन $t^2 e^{at}$ का लाप्लास रूपांतर परिकलित करें, जहाँ a एक स्थिरांक है।

(e) $f(z) = (z^*)^2$ को $u\,(x, y) + iv\,(x, y)$ के रूप में लिखें।

(f) सिद्ध करें कि $\{1, -1\}$ गुणनात्मक समूह $\{1, i, -1, -i\}$ का एक उपसमूह है।

(g) यदि A^{ij} एक प्रतिसममित टेन्सर है और B_i एक सदिश है तो $A^{ij} B_i B_j$ का मान प्राप्त करें, (यहां संकलन परंपरा प्रयुक्त की गई है।)

(h) लेजोन्ड्रे बहुपदों $P_n(x)$ का पुनरावृत्ति संबंध निम्नलिखित है :

$(2n+1)\,x\,P_n(x) = (n+1)\,P_{n+1}(x) + n\,P_{n-1}(x)$ $P_2(x)$ परिकलित करें जबकि $P_0(x) = 1$ और $P_1(x) = x$ दिया है।

2. **कोई दो** भाग करें : **5x2=10**

(a) निम्नलिखित आव्यूह A के लिए आइगेन मान आइगेन सदिश प्राप्त करें :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

सिद्ध करें कि आइगेन सदिश लांबिक हैं।

(b) सिद्ध करें कि हर्मिटी आव्यूह के आइगेन मान वास्तविक होते हैं।

(c) सिद्ध करें कि आव्यूह गुणन के अधीन कोटि n वाले सभी व्युत्क्रमणीय वर्ग आव्यूहों के समुच्चय से एक समूह बनता है। क्या यह समूह आबेली समूह है?

3. **कोई दो** भाग करें : 5x2=10

(a) अवशिष्ट विधि का प्रयोग कर निम्नलिखित समाकल परिकलित करें :

$\oint_C \frac{e^z \, dz}{(z^2-1)}$ जहाँ C एक वामावर्त खींचा गया वृत्त $z=2$ है।

(b) फलन $\frac{\sin\left(\frac{1}{z}\right)}{z^2+2z+2}$, $m \neq 0$ की विचित्रता और अनंतक का निर्धारण करें और उनके प्रकार बताएँ।

(c) $z=1$ के प्रति $f(z)=\frac{e^z}{(z-1)^2}$ का लौरेंट श्रेणी प्रसार प्राप्त करें।

4. **कोई दो** भाग करें : 5x2=10

(a) निम्नलिखित फलन

$$f(x) 5 \begin{cases} 1 & 0 < x < 2 \\ 0 & x > 2 \end{cases}$$ का फूरिये रूपांतर प्राप्त करें।

(b) फलन $\frac{1}{(S-1)\left(S^2+1\right)}$ का व्युत्क्रम लाप्लास रूपांतर प्राप्त करें।

(c) सिद्ध करें कि फलन f (t) के द्वितीय कोटि अवकलज का लाप्लास रूपांतर निम्नलिखित है :

$L [f''(t)] = S^2 L [f(t)] - Sf(0) - f'(0), S > 0$

5. कोई **एक** भाग करें : **10**

(a) पूर्णांक कोटि वाले बेसल फलनों $J_n(x)$ को निम्नलिखित जनक फलन से प्राप्त किया जाता है :

$$\exp\left[\frac{x}{2}\left(t - \frac{1}{t}\right)\right] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(x)\, t^n$$

सिद्ध करें कि

$$\cos(x \sin\theta) = J_o(x) + 2 \sum_{K=1}^{\infty} J_{2K}(x) \cos(2K\theta)$$

और $J_o(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \cos(x \sin\theta)\, d\theta$ ।

(b) लागेर बहुपदों $L_n(x)$ के जनक फलन

$$\frac{e^{-\frac{xt}{1-t}}}{1-t} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} L_n(x)\, t^n, |t| < 1$$

का प्रयोग कर निम्नलिखित पुनरावृत्ति संबंध व्युत्पन्न करें : $(n+2) L_{n+2}(x) = (2n+3-x) L_{n+1}(x) - (n+1) L_n(x)$