No. of Printed Pages : 8 **MTE-09**

02130

BACHELOR'S DEGREE PROGRAMME (BDP)

Term-End Examination

December, 2012

ELECTIVE COURSE : MATHEMATICS

MTE-09 : REAL ANALYSIS

Time : 2 hours *Maximum Marks : 50*

Weightage : 70%

Note : *Attempt **five** questions in all. Q. No. **1** is **compulsory**. Do **any four** questions out of Q. No. **2** to **7**. No calculators are allowed.*

---

1. Which of the following statements are *true* and which are *false* ? Give reasons for your answer. **10**

(a) Field $A = \{ a + b_i \mid a, b \in \mathbf{Q} \}$ of complex numbers is an ordered field.

(b) The sum of two discontinuous functions is always discontinuous.

(c) The series $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{7-3n}{2n+9}$ converges.

(d) For the function $f(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$, there exists a point $c \in]\, 1, 3\, [$ such that $f'(c) = 0$.

(e) The function $f : [0, 1] \to \mathbf{R}$ defined by $f(x) = 10$ is not Riemann integrable.

2. (a) Represent $2+\sqrt{2}$ geometrically. 3

(b) Test the absolute and conditional convergence of the series $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3n+5}$. 3

(c) Show that the equation $x^3 - 2x^2 + 5x - 12 = 0$ has a root which is a positive real number. 4

3. (a) Check whether the sequence $(f_n(x))$ is uniformly convergent over the interval $[0, 1]$, where $f_n(x) = \frac{2x+1}{n}$. 3

(b) Find the greatest value of the function $f(x) = x^4 - 2x^3 - 3x^2 + 4x + 7$ over the interval $[0, 1]$. 4

(c) Applying mean value theorem, show that $e^3 > 4$. 3

4. (a) Prove that the set $\left\{\frac{3}{5}, \frac{3}{6}, \frac{3}{7}, \ldots\right\}$ is a countable set. 2

(b) Show that every convergent sequence is bounded. Is the converse true ? Justify your answer. 3

(c) Let a function, $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ be defined as 5

$$f(x) = \begin{cases} 7, \text{ if } x \text{ is a rational number} \\ 9, \text{ if } x \text{ is an irrational number} \end{cases}$$

show that f is not continuous at any $a \in \mathbf{R}$.

5. (a) Show that $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{7n^5 + 3n^2 + 9}{2n^6 + 7n + 1} = 0$ 2

(b) Show that $\{0, 1\} \cup \left\{ \dfrac{5}{9}, \dfrac{3}{4}, \dfrac{10}{7} \right\}$ is a closed set. 2

(c) Find $\lim\limits_{n \to \infty} \sum\limits_{r=1}^{3n} \dfrac{n}{(3n-r)^2}$. 3

(d) Let $f : [0, 1] \to \mathbf{R}$ be a function defined by $f(x) = x^2$. Let $P_1 = \left\{0, \dfrac{1}{4}, \dfrac{1}{2}, 1\right\}$ and $P_2 = \left\{0, \dfrac{1}{4}, \dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{2}\ 1\right\}$ be two partitions of the interval, $[0, 1]$. Evaluate $U(P_1, f)$ and $L(P_2 f)$ and compare their values. 3

6. (a) Discuss the convergence of the following series : **6**

(i) $1 + 2x + 2^2 x^2 + 2^3 x^3 + \ldots . (x>0)$

(ii) $\sum \frac{\sqrt{n^4+1} - \sqrt{n^4-1}}{n}$

(iii) $\frac{1\times 2}{3^2} + \frac{3\times 4}{5^2} + \frac{5\times 6}{7^2} + \ldots\ldots$

(b) Examine the continuity of the function **4**

$f : [3, 5] \to \mathbf{R}$ defined by $f(x) = \frac{[x]}{5x-2}$, where

$[x]$ denotes the greatest integer function.

7. (a) Test for convergence the series $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2+n)^{10}}$ **3**

using Cauchy's integral test.

(b) Find the Maclaurin series expansion of the function, e^{-3x}. **3**

(c) Using first mean value theorem of integral calculus, show that there exists $c \in [3, 5]$ such that $f(c) = \frac{49}{3}$, where $f(x) = x^2$. **4**

एम.टी.ई.-09

स्नातक उपाधि कार्यक्रम (बीडीपी)

सत्रांत परीक्षा

दिसम्बर, 2012

ऐच्छिक पाठ्यक्रम : गणित

एम.टी.ई.-09 : वास्तविक विश्लेषण

समय : 2 घण्टे *अधिकतम अंक : 50*

कुल का : 70%

नोट : *कुल **पाँच** प्रश्नों के उत्तर दीजिए। प्रश्न संख्या 1 **अनिवार्य** है। प्रश्न संख्या 2 से 7 में से **किन्हीं चार** प्रश्नों के उत्तर दीजिए। कैल्कुलेटरों का प्रयोग करने की अनुमति नहीं है।*

1. बताइए निम्नलिखित में से कौन से कथन ***सत्य*** हैं और कौन से ***असत्य***। अपने उत्तर का कारण बताइए। 10

   (a) जटिल संख्याओं का क्षेत्र $A = \{ a + b_i \mid a, b \in \mathbf{Q} \}$ एक क्रमित क्षेत्र है ?

   (b) दो असंतत फलनों का योग हमेशा असंतत होता है।

   (c) श्रेणी $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{7-3n}{2n+9}$ अभिसरण करती है ?

   (d) फलन $f(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$ के लिए एक ऐसे बिन्दु $c \in]1, 3[$ का अस्तित्व होता है जिसके लिए $f'(c) = 0$.

   (e) $f(x) = 10$ द्वारा परिभाषित फलन $f : [0, 1] \to \mathbf{R}$ रीमेन समाकलनीय नहीं है।

2. (a) $2+\sqrt{2}$ ज्यामितीय रूप से निरूपित कीजिए। 3

(b) श्रेणी $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3n+5}$ के निरपेक्ष और सप्रतिबंध अभिसरण की जाँच कीजिए। 3

(c) दिखाइए कि समीकरण $x^3-2x^2+5x-12=0$ का एक मूल होता है जो कि एक वास्तविक संख्या है। 4

3. (a) जाँच कीजिए कि अनुक्रम $(f_n(x))$ अंतराल $\{0, 1\}$ पर एकसमानतः अभिसारी है या नहीं; जहाँ

$$f_n(x) = \frac{2x+1}{n} \text{ है}$$

(b) फलन $f(x) = x^4-2x^3-3x^2+4x+7$ का अंतराल $\{0, 1\}$ पर अधिकतम मान ज्ञात कीजिए। 4

(c) माध्य मान प्रयोग लागू करके दिखाइए कि $e^3 > 4$. 3

4. (a) सिद्ध कीजिए कि समुच्चय $\left\{\frac{3}{5}, \frac{3}{6}, \frac{3}{7}, \ldots\right\}$ एक गणनीय समुच्चय है। 2

(b) दिखाइए कि पत्येक अभिसारी अनुक्रम परिबद्ध होता है। क्या इसका विलोम सही है? अपने उत्तर की पुष्टि कीजिए। 3

(c) मान लीजिए फलन $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ निम्नलिखित रूप से परिभाषित है : **5**

$$f(x) = \begin{cases} 7, \text{ यदि } x \text{ परिमेय संख्या है} \\ 9, \text{ यदि } x \text{ एक अपरिमेय संख्या है} \end{cases}$$

दिखाइए कि किसी भी $a \in \mathbf{R}$ पर f संतत नहीं संख्या है।

5. (a) दिखाइए कि $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{7n^5 + 3n^2 + 9}{2n^6 + 7n + 1} = 0$ **2**

(b) दिखाइए कि $\{0, 1\} \cup \left\{ \frac{5}{9}, \frac{3}{4}, \frac{10}{7} \right\}$ एक संवृत्त समुच्चय है। **2**

(c) $\lim\limits_{n \to \infty} \sum\limits_{r=1}^{3n} \dfrac{n}{(3n-r)^2}$ ज्ञात कीजिए। **3**

(d) मान लिजिए $f : [0, 1] \to \mathbf{R}$, $f(x) = x^2$. द्वारा परिभाषित है। मान लीजिए $P_1 = \left\{0, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, 1\right\}$ और $P_2 = \left\{0, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, 1\right\}$ अन्तराल [0, 1] के दो विभाजन हैं। $\cup(P_1, f)$ और $\lfloor (P_2 f)$ का मूल्यांकन कीजिए और उनके मानों की तुलना कीजिए। **3**

6. (a) निम्नलिखित श्रेणियों का अभिसरण बताइए : 6

(i) $1+2x+2^2x^2+2^3x^3+\ldots.(x>0)$

(ii) $\sum \dfrac{\sqrt{n^4+1}-\sqrt{n^4-1}}{n}$

(iii) $\dfrac{1\times 2}{3^2}+\dfrac{3\times 4}{5^2}+\dfrac{5\times 6}{7^2}+\ldots\ldots$

(b) $f\ (x)=\dfrac{[x]}{5x-2}$ द्वारा परिभाषित फलन $f:[3,5]\to \mathbf{R}$ की संततता की जाँच कीजिए जहाँ $[x]$ महत्तम पूर्णांक फलन को निरूपित करता है। 4

7. (a) कौशी केन्द्र समाकल परीक्षण से श्रेणी $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{(2+n)^{10}}$ के अभिसरण की जाँच कीजिए। 3

(b) फलन e^{-3x} का मैक्लोरियन श्रेणी प्रसार ज्ञात कीजिए। 3

(c) समाकल कलन के प्रथम माध्यमान प्रमेय द्वारा दिखाइए कि एक ऐसे $c \in [3, 5]$ का अस्तित्व होता है जिसके $f(c)=\dfrac{49}{3}$, जहाँ $f(x)=x^2$. 4