No. of Printed Pages : 8

MTE-06

00040

BACHELOR'S DEGREE PROGRAMME (BDP)

Term-End Examination

December, 2012

ELECTIVE COURSE : MATHEMATICS

MTE-06 : ABSTRACT ALGEBRA

Time : 2 hours *Maximum Marks : 50*

Weightage : 70%

---

*Note : Attempt five questions in **all**. Question No. 7 is **compulsory**. Answer any four questions from the rest. Use of calculators not permitted.*

---

1. (a) Let G be a cyclic group of order n generated by a show that a^m generates G if and only if $(m, n) = 1$. **4**

(b) Consider the ring $R = Z_3 \dfrac{[x]}{< x^6 - 1 >}$. **6**

(i) Check whether R is a finite ring or not.

(ii) Check whether R has zero divisors.

(iii) Check whether R has nilpotent elements.

2. (a) Define "Signature of a permutation." Show that it is a homomorphism from S_m to Z. Also find the signature of (1, 4, 5) in S_5, using the definition. 4

(b) Let $R=\left\{\begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} \middle| a, b \in Z\right\}$ be a ring with respect to the usual addition and multiplication of 2×2 matrices. 6

Let $\phi : R \to Z$ be defined by

$\phi = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} = a-b$. Show that :

(i) ϕ is a ring homomorphism of R onto Z

(ii) Determine ker ϕ.

(iii) Use the Fundamental Theorem of Homomorphism to determine whether ker ϕ is a prime ideal. Is it a maximal ideal ? Justify your answers.

3. (a) Let G be a group and H, K be subgroups of G, each of order p, where p is a prime number. Show that either $H \cap K = \{e\}$ or $H = K$. Is the result true if p is not a prime number ? Justify your answer. 5

(b) Give an example, with justification, of a ring R and its ideals I and J such that $IJ \neq I \cap J$. 3

(c) Find all the units in $Z[\sqrt{2}]$. 2

4. (a) Let G be a group and $Z(G) = \{ a \in G \mid ax = xa \; \forall \; x \in G \}$. Show that $Z(G)$ is a normal subgroup of G. Further, check whether $\frac{G}{Z(G)}$ is abelian or not. **4**

(b) Let K be a finite field of characteristic $p \neq 0$. Then show that K has p^n elements for some $n \in N$. Further, give the characteristic of a field with 32 elements. **6**

5. (a) Write two distinct equivalence relations on the set $S = \{ a, b, c \}$, justifying your answer. **5**

(b) Give two distinct rings whose quotient field is $\{ a + bi \} \mid a, b \in Q \}$. Justify your answer. **5**

6. (a) Prove, by induction, that $0(S_n) = n! \; \forall \; n \geq 1$. **5**

(b) Show that $I = \{ (a, 0) \mid a \in Z \}$ is an ideal of the ring $Z \times Z$ with respect to the component wise addition and multiplication. Also give two distinct elements of $Z \times Z / I$. **5**

7. Which of the following statements are true ? Give reasons for your answer. **10**

(a) S_5 has an element of order 6.

(b) Every infinite integral domain is a field.

(c) A group homomorphism $\phi\ Z_{50} \rightarrow Z_{50}$: $\phi\,(\overline{11}) = \overline{15}$ is an automorphism.

(d) A group (G, +), with multiplication * defined on G, makes G a ring.

(e) For any set A, $A \cup \phi = A \cup A$.

स्नातक उपाधि कार्यक्रम (बी डी पी)

सत्रांत परीक्षा

दिसम्बर, 2012

ऐच्छिक पाठ्यक्रम : गणित

एम.टी.ई.- 06 : अमूर्त बीजगणित

समय : 2 घण्टे | *अधिकतम अंक : 50*

कुलांक : 70%

नोट : *कुल* ***पाँच*** *प्रश्नों के उत्तर दीजिए। प्रश्न 7 करना ज़रूरी है। शेष प्रश्नों में से कोई* ***चार*** *कीजिए। कैलकुलेटर का प्रयोग करने की अनुमति* ***नहीं*** *है।*

---

1. (a) मान लीजिए G, a द्वारा जनित कोटि n वाला एक चक्रीय समूह है। दिखाइए कि a^m, G को जनित करता है यदि और केवल यदि $(m, n)=1$. **4**

(b) वलय $R=Z_3\dfrac{[x]}{<x^6-1>}$ लीजिए। **6**

(i) जाँच कीजिए कि R परिमित वलय है या नहीं।

(ii) जाँच कीजिए कि R के शून्यके भाजक होते हैं या नहीं।

(iii) जाँच कीजिए कि R के शून्यभावी अवयव होते हैं या नहीं।

2. (a) 'क्रमचय के चिह्नक' को परिभाषित कीजिए। दिखाइए कि यह S_m से Z तक एक समाकारिता है। परिभाषा का प्रयोग करते हुए S_5 में (1, 4, 5) का चिह्नक भी ज्ञात कीजिए। **4**

(b) मान लीजिए $R=\left\{\begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} \middle| a, b \in Z\right\}$ 2×2 आव्यूहों की जमा और गुणा के सापेक्ष एक वलय है। मान लीजिए $\phi : R \to Z$, $\phi=\begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} = a-b$ द्वारा परिभाषित है। दिखाइए कि : **6**

(i) ϕ, R से Z तक एक आच्छादी वलय समाकारिता है।

(ii) ker ϕ मालूम कीजिए।

(iii) ker ϕ एक अभाज्य गुणजावली है या नहीं, यह निर्धारित करने के लिए समाकारिता के मूल प्रमेय का प्रयोग कीजिए। क्या यह उच्चिष्ठ गुणजावली है? अपने उत्तरों की पुष्टि कीजिए।

3. (a) मान लीजिए G एक समूह है और H, K इसके कोटि p वाले उपसमूह हैं, जहाँ p एक अभाज्य संख्या है। दिखाइए कि या तो $H \cap K = \{e\}$ या $H = K$ है। यदि p अभाज्य संख्या नहीं हो, तो क्या फिर भी यह निष्कर्ष सही रहेगा? अपने उत्तर की पुष्टि कीजिए। **5**

(b) पुष्टि के साथ, एक वलय R और उसकी गुणजावलियों I और J का एक ऐसा उदाहरण दीजिए जिसके लिए $IJ \neq I \cap J$ हो। 3

(c) $Z[\sqrt{2}]$ की सभी मात्रक ज्ञात कीजिए। 2

4. (a) मान लीजिए G एक समूह है और $Z(G) = \{ a \in G \mid ax = xa \ \forall \ x \in G \}$. दिखाइए कि Z(G), G का प्रसामान्य समूह है। इसके आगे, जाँच कीजिए कि $\frac{G}{Z(G)}$ आबेली है या नहीं। 4

(b) मान लीजिए K अभिलक्षणिय $(p \neq 0)$ वाला एक परिमित क्षेत्र है। तब दिखाइए कि K के p^n अवयव हैं, जहाँ $n \in N$ इसके आगे, 32 अवयवों वाले क्षेत्र का अभिलक्षणिक दीजिए। 6

5. (a) समुच्चय $S = \{ a, b, c \}$, पर दो अलग-अलग तुल्यता संबंधो को लिखिए तथा अपने उत्तर की पुष्टि कीजिए। 5

(b) ऐसे दो अलग-अलग वलय बताइए जिनका विभाग क्षेत्र $\{ a + bi \} \mid a, b \in Q \}$ है। अपने उत्तर की पुष्टि कीजिए। 5

6. (a) आगमन द्वारा सिद्ध कीजिए कि $0(S_n) = n! \ \forall \ n \geq 1$. 5

(b) दिखाइए कि $I = \{ (a, 0) \mid a \in Z \}$ संगत घटकों के जमा और गुणा के सापेक्ष वलय $Z \times Z$ की एक गुणजावली है। $Z \times Z / I$ के दो अलग-अलग अवयव भी दीजिए। 5

7. बताइए निम्नलिखित में से कौन से कथन सत्य हैं। अपने उत्तरों के कारण भी दीजिए। **10**

(a) S_5 का कोटि 6 वाला एक अवयव होता है।

(b) प्रत्येक अपरिमित पूर्णांकीय प्रांत एक क्षेत्र है।

(c) एक समूह समाकारिता $\phi : Z_{50} \to Z_{50} : \phi(\overline{11}) = \overline{15}$ एक स्वाकारिता है।

(d) यदि $(G, +)$ एक समूह है और G पर गुणन*परिभाषित है, तो G एक वलय बन जाता है।

(e) किसी समुच्चय A के लिए $A \cup \phi = A \cup A$.