

BACHELOR'S DEGREE PROGRAMME (BDP)

Term-End Examination

December, 2012

ELECTIVE COURSE : MATHEMATICS

MTE-04 : ELEMENTARY ALGEBRA

Time : 1½ hours

Maximum Marks : 25

Instructions :

Weightage : 70%

1. *Students registered for both MTE-4 & MTE-5 courses should answer both the question papers in two separate answer books entering their enrolment no. course code and course title clearly on both the answer books.*
2. *Students who have registered for MTE-4 or MTE-5 should answer the relevant question paper after entering their enrolment number, course code and course title on the answer book.*

Note : *Answer any three questions from question Nos. 2 to 5. Question No. 1 is compulsory. Calculators are not allowed.*

1. Which of the following statements are **true** and **10** which are **false** ? Justify your answers.
 - (a) $\{\sqrt{2}, \text{IGNOU, algebra}\}$ is a set.
 - (b) All roots of the equation $3^{2x} + 81 = 30 \times 3^x$ are real.

- (c) The arithmetic mean of 3 non - zero real numbers is greater than their harmonic mean.
- (d) De Moivre was the mathematician who first popularised the name, 'complex number'.
- (e) Any pair of linear equations in two variables is consistent.

2. (a) Can we solve the following by Cramer's rule ? If yes, solve it. If no, then find solutions by any other method. 2½

$$x + 2y + 3z = 3$$

$$4x + y = 4$$

$$2x + 4y + 6z = 6$$

- (b) Show, by induction, that $\forall n \geq 1$, 2½

$$1^2 + 3^2 + 5^2 + \dots + (2n - 1)^2 = \frac{n}{3} (4n^2 - 1)$$

3. (a) Let A and B be sets of natural numbers \mathbf{N} given by 2

$$A = \{3x \mid x \in \mathbf{N}\}, B = \{5x \mid x \in \mathbf{N}\}.$$

Find $A \cap B$. Is $A \cup B = \mathbf{N}$? Why?

- (b) Let x_1, x_2, \dots, x_n be positive real numbers and $s = x_1 + x_2 + \dots + x_n$. Apply the Cauchy - Schwarz inequality to prove that 3

$$\sum_{i=1}^n \frac{x_i}{s - x_i} \geq \frac{n}{n - 1}.$$

4. (a) If a is a negative real number and $n=2m$, with $m \in \mathbf{N}$, then prove that there is no n th - root of a . 2
- (b) Give a direct proof, and a proof by contradiction, of the following statement : 3
The equations $3x=y$ and $3y=x$ are consistent.
5. (a) Find the polar form of $-1+i$. 1
- (b) If the sum of two roots of the equation $3x^4 - 28x^3 - 3x^2 + 112x - 36 = 0$ is zero, find all its roots. 4
-

स्नातक उपाधि कार्यक्रम (बी डी पी)

सत्रांत परीक्षा

दिसम्बर, 2012

ऐच्छिक पाठ्यक्रम : गणित

एम.टी.ई.-04 : प्रारंभिक बीजगणित

समय : 1½ घण्टे

अधिकतम अंक : 25

कुलका : 70%

निर्देश :

1. जो छात्र एम.टी.ई.-4 और एम.टी.ई.-5 दोनों पाठ्यक्रमों के लिए पंजीकृत हैं, दोनों प्रश्नपत्रों के उत्तर अलग-अलग उत्तर पुस्तिकाओं में अपना अनुक्रमांक, पाठ्यक्रम कोड तथा पाठ्यक्रम नाम साफ-साफ लिखकर दें।
2. जो छात्र एम.टी.ई.-4 या एम.टी.ई.-5 किसी एक के लिए पंजीकृत हैं, अपने उसी प्रश्नपत्र के उत्तर, उत्तर-पुस्तिका में अपना अनुक्रमांक, पाठ्यक्रम कोड तथा पाठ्यक्रम नाम साफ-साफ लिखकर दें।

नोट : प्रश्न संख्या 2 से 5 में से कोई तीन प्रश्न कीजिए। प्रश्न 1 करना जरूरी है। कैल्कुलेटर के प्रयोग की अनुमति नहीं है।

1. नीचे दिए गए कथनों में कौन-कौन से कथन सत्य हैं और कौन-कौन से असत्य हैं? अपने उत्तर की पुष्टि कीजिए।
 - (a) $\{\sqrt{2}, \text{IGNOU}, \text{बीजगणित}\}$ एक समुच्चय है।
 - (b) समीकरण $3^{2x} + 81 = 30 \times 3^x$ के सभी मूल वास्तविक संख्याएं हैं।

- (c) 3 शून्येतर वास्तविक संख्याओं का समांतर माध्य उनके हरात्मक माध्य से बड़ा होता है।
- (d) द. माथवर वह पहला व्यक्ति था जिसने पहले पहल शब्द 'सम्मिश्र संख्या' को लोकप्रिय बनाया था।
- (e) दो चरों वाले रैखिक समीकरणों वाला कोई भी युग्म संगत होता है।

2. (a) क्या हम क्रैमर-नियम से निम्नलिखित को हल कर सकते हैं? यदि हाँ हैं तो इसे क्रैमर-नियम से हल कीजिए। और, यदि उत्तर 'ना' है, तो किसी अन्य विधि से इनके हल ज्ञात कीजिए। 2½

$$x + 2y + 3z = 3$$

$$4x + y = 4$$

$$2x + 4y + 6z = 6$$

- (b) आगमन नियम से यह दिखाइए कि $\forall n \geq 1$, 2½

$$1^2 + 3^2 + 5^2 + \dots + (2n - 1)^2 = \frac{n}{3} (4n^2 - 1).$$

3. (a) मान लीजिए A और B, जहाँ 2

$$A = \{3x \mid x \in \mathbf{N}\}, B = \{5x \mid x \in \mathbf{N}\}.$$

द्वारा दिए गए प्राकृतिक संख्याओं \mathbf{N} के समुच्चय हैं।

$A \cap B$ ज्ञात कीजिए। क्या $A \cup B = \mathbf{N}$?

- (b) मान लीजिए x_1, x_2, \dots, x_n धन वास्तविक संख्याएँ हैं 3
 और $s = x_1 + x_2 + \dots + x_n$ कॉशी-श्वार्ज असमिका से
 यह सिद्ध कीजिए कि

$$\sum_{i=1}^n \frac{x_i}{s - x_i} \geq \frac{n}{n-1}.$$

4. (a) यदि a एक ऋण वास्तविक संख्या हैं और $n = 2m$, जहाँ 2
 $m \in \mathbb{N}$, तो सिद्ध कीजिए कि a का कोई भी n वाँ मूल
 नहीं होता है।

- (b) नीचे दिए गए कथन की एक प्रत्यक्ष उपपत्ति और एक 3
 अंतर्विरोध द्वारा दी गई उपपत्ति दीजिए।

समीकरण $3x = y$ और $3y = x$, संगत नहीं है।

5. (a) $-1 + i$ का ध्रुवी रूप ज्ञात कीजिए। 1

- (b) यदि समीकरण $3x^4 - 28x^3 - 3x^2 + 112x - 36 = 0$ 4
 के दो मूलों का योग शून्य हो, तो इसके सभी मूल ज्ञात
 कीजिए।

BACHELOR'S DEGREE PROGRAMME (BDP)

Term-End Examination

December, 2012

ELECTIVE COURSE : MATHEMATICS

MTE-05 : ANALYTICAL GEOMETRY

Time : 1½ hours

Maximum Marks : 25

Weightage : 70%

Note : Question No. 5 is compulsory. Do any three questions from questions numbers.. 1 to 4. Calculators are not allowed.

1. (a) In a parabola show that the tangent at any point makes equal angles with the focal radius of the point and the line parallel to the axis through the point. 3
- (b) Show that the plane $x + 2y + 2z = 9$ touches the sphere $x^2 + y^2 + z^2 = 9$. Find the point of contact. 2
2. (a) Find the length of the major axis of the ellipse 2

$$r = \frac{2e}{1 + e \cos\theta}$$

- (b) Find the equation of right circular cone whose axis is the y - axis, vertex is the origin and semi vertical angle is $\pi/6$. 3
3. (a) Prove that the equations of line of intersection of planes $4x + 4y - 5z = 12$ and $8x + 12y - 13z = 32$ can be written as : 2
- $$\frac{x - 1}{2} = \frac{y - 2}{3} = \frac{z}{4}$$
- (b) Check whether the conicoid. 3
- $$x^2 + y^2 + z^2 - 6yz - 2zx - 2xy - 6x - 2y - 2z + 1 = 0$$
- has a centre or not. If so find the centre.
4. (a) Find the equation of tangent planes to 3
- $$7x^2 - 3y^2 - z^2 + 21 = 0$$
- which pass through the line
- $$7x - 6y + 9 = 0, z = 3.$$
- (b) For the hyperbola $9x^2 - 4y^2 = 36$, find the 2
- vertices eccentricity, foci and equations of asymptotes.
5. Are the following statements **true** or **false** ? Give 10
- reasons in support of your answers.
- (a) All planar sections of an ellipsoid are ellipses.
- (b) $5x - 2y = 5 + 2z$ represents a line.

- (c) The projection of the line segment joining the points $P(1, 2, 3)$ and $Q(-2, 1, 4)$ on x - axis is 5.
- (d) The length of the perpendicular from any point on the cylinder $x^2 + y^2 = 9$ to its axis is 4.
- (e) The equation.

$$\frac{2}{r} = 3 \cos\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right) + 2 \sin\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right)$$

represents a straight line.

स्नातक उपाधि कार्यक्रम (बी डी पी)

सत्रांत परीक्षा

दिसम्बर, 2012

ऐच्छिक पाठ्यक्रम : गणित

एम.टी.ई.-05 : वैश्लेषिक ज्यामिति

समय : 1½ घण्टे

अधिकतम अंक : 25

कुलका : 70%

नोट : प्रश्न संख्या 5 अनिवार्य है। प्रश्न संख्या 1 से 4 में से किन्हीं तीन उत्तर दीजिए। कैल्कुलेटर का प्रयोग करने की अनुमति नहीं है।

1. (a) एक परवलय में दिखाइए कि किसी भी बिन्दु पर स्पर्श रेखा बिन्दु के नाभीय त्रिज्या और बिन्दु से अक्ष के समांतर रेखा के साथ बराबर कोण बनाती है। 3
- (b) दिखाइए कि समतल $x + 2y + 2z = 9$ गोले $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ को स्पर्श करता है। इसका स्पर्श बिन्दु भी ज्ञात कीजिए। 2
2. (a) दीर्घवृत्त $r = \frac{2e}{1 + e \cos \theta}$ के प्रमुख अक्ष की लम्बाई ज्ञात कीजिए। 2
- (b) एक ऐसे शंकु का समीकरण ज्ञात कीजिए जिसका अक्ष y - अक्ष है, शीर्ष-मूल बिन्दु है और अर्द्ध शीर्षकोण $\pi/6$ है। 3

3. (a) सिद्ध कीजिए कि समतलों $4x + 4y - 5z = 12$ और $8x + 12y - 13z = 32$ के प्रतिच्छेदी रेखाओं के समीकरण को निम्नलिखित रूप में लिखा जा सकता है :

$$\frac{x - 1}{2} = \frac{y - 2}{3} = \frac{z}{4}$$

- (b) जाँच कीजिए कि शांकव $x^2 + y^2 + z^2 - 6yz - 2zx - 2xy - 6x - 2y - 2z + 1 = 0$ का केन्द्र है या नहीं। यदि केन्द्र है तो ज्ञात कीजिए।

4. (a) $7x^2 - 3y^2 - z^2 + 21 = 0$ का ऐसे स्पर्श समतलों का समीकरण ज्ञात कीजिए जो रेखा

$$7x - 6y + 9 = 0, z = 3$$
 से गुजरने वाले हो।

- (b) अतिपरवलय $9x^2 - 4y^2 = 36$ के लिए शीर्ष, उत्केन्द्रकता, नाभियाँ और अनंतस्पर्शियों के समीकरण आदि ज्ञात कीजिए।

5. बताइए निम्नलिखित कथन सत्य हैं या असत्य। अपने उत्तरों के पक्ष में कारण दीजिए।

- (a) एक दीर्घवृत्त के सभी समतलीय परिच्छेद दीर्घवृत्त होते हैं।

- (b) $5x - 2y = 5 + 2z$ रेखा को निरूपित करता है।

- (c) x - अक्ष पर बिन्दुओं P(1, 2, 3) और Q(- 2, 1, 4) को जोड़ने वाली रेखा खंड का प्रक्षेप 5 है।
- (d) बेलन $x^2 + y^2 = 9$ पर किसी भी बिन्दु से उसके अक्ष के प्रति अभिलंब की लंबाई 4 है।
- (e) समीकरण

$$\frac{2}{r} = 3 \cos\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right) + 2 \sin\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right) \text{ सीधी रेखा}$$

को निरूपित करता है।
