No. of Printed Pages : **11** **MTE-11**

01775

BACHELOR'S DEGREE PROGRAMME

Term-End Examination

December, 2012

ELECTIVE COURSE : MATHEMATICS
MTE-11 : PROBABILITY AND STATISTICS

Time : 2 hours *Maximum Marks : 50*
Weightage : 70%

Note : *Question No. 7 is* ***compulsory****. Answer* ***any four*** *questions from question no.* ***1*** *to* ***6****. Calculators are* ***not*** *allowed.*

---

1. (a) For a distribution mean is 10, variance is 16, b_1 is 1 and $b_2=4$. Obtain the first four moments about origin. **5**

(b) Let $X_1, X_2, \ldots, X_n$ be a random sample from the density function **5**

$$f(x, \theta)=\frac{1}{\theta}\, e^{-x/\theta}, \theta>0, x>0$$

show that $\overline{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ is unbiased for θ

and $\operatorname{var}\left(\overline{X}\right)=\frac{\theta^2}{n}$. Check whether $\operatorname{var}\left(\overline{X}\right)$

attains the Cramer Rao lower bound.

2. (a) Let X and Y be discrete random variables with jointly probability function. 6

$$f(x, y) = \frac{1}{4} \text{ at } (x, y) = (-3, -5),\ (-1, -1)$$

(1, 1) and (3, 5) compute E(X), E(Y), E(XY), var (X), correlation coefficient between X and Y. Check whether X and Y are independent ?

(b) Let X ~ N (μ, 4), μ is unknown. Test is $H_0 : \mu = -1$ against $\mu = 1$ based on a sample of size 10 from this population, use the critical region $x_1 + 2x_2 + 3x_3 + - - + 10x_{10} \geq 0$. What is the size of the test ? What is the power of the test ? 4

3. (a) If x_i, i = 1, 2, 3 are three uncorrelated variables each having the same standard deviation. Obtain the correlation coefficient between $(X_1 + X_2)$ and $(X_2 + X_3)$. 4

(b) Out of 8000 graduates in a town 800 are females, out of 1600 graduate employees 1480 are males. At 5% level of significance test if any distinction is made in appointment on the basis of gender. You may like to use the following values 6

$\chi^2_{0.05}$ (1 d.f) = 3.841, $\chi^2_{0.05}$ (2 d.f) = 5.991,

$\chi^2_{0.05}$ (3 d.f) = 7.815

4. (a) Suppose that a door way being constructed is to be used by a class of people whose heights are normally distributed with mean 70 inches and standard deviation 3 inches. Find the height of the doorway so that not more than 25% of the people bump their heads ? If the height of the doorway is fixed at 76 inches, how many persons out of 5000 are expected to bump their heads ? (Given $P(Z \leq 2) = .9772$, $P(Z \leq 1) = 0.6834$). 5

(b) The two lines of regression are given by $2X + 3Y - 8 = 0$, $X + 2Y - 5 = 0$. Find 5

(i) Which is the line of regression of X on Y ?

(ii) The coefficient of correlation between X and Y.

(iii) $E(X/Y = 1)$.

(iv) Means of X and Y

5. (a) Suppose there are two bags A and B. A contains n white and 2 Black balls and B contains 2 white and n black balls. One of the two bags is selected at random and two balls are drawn from it without replacement. If both the balls drawn are white and the probability that the bag A was used to draw the ball is $\frac{6}{7}$, find the value of n. 5

(b) Let X_i, $i = 1,2,..,n$ be a random sample from $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$; $x > 0$. Find the p.d.f. of $2 \lambda n \overline{X}$ where $\overline{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i$ and identify the distribution. 5

6. (a) Let the joint density function of (X, Y) be given by $f(x, y) = \frac{x+y}{3}$, $\begin{matrix} 0 < x < 1 \\ 0 < y < 2 \end{matrix}$ check whether X and Y are independent or not. 3

(b) If X is a Poisson variate such that $P(X=2) = 9\, P(X=4) + 90\, P(X=6)$ 4

Find (i) the means of X,

(ii) the coefficient of skewness.

(c) Let $X_1, X_2, \ldots, X_n$ be a random sample from a distribution having finite mean μ and finite variance σ^2 show that 3

$$T(X_1, X_2, \ldots X_n) = \frac{2}{n(n+1)} \sum_{i=1}^{n} i X_i \text{ is}$$

unbiased for μ.

7. Which of the following statements are **true** or **false** ? Give reasons for your answer : 5x2=10

(a) The correlation coefficient between X and Y for $n=2$ is zero where (X, Y) is (5.4, 6) and (10.8, 6)

(b) Size of the critical region is same as the level of significance.

(c) If X_i, $i=1, 2, ___, n$ is a random sample from $N(\mu, 1)$. Then $\sum_{i=1}^{n}\left(X_i-\overline{X}\right)^2$ also follows normal distribution.

(d) The sum of two independent geometric variates with same parameter follows hyper-geometric distribution.

(e) $P(B|A) < P(B). P(A \cap B).$

एम.टी.ई.-11

स्नातक उपाधि कार्यक्रम

सत्रांत परीक्षा

दिसम्बर, 2012

ऐच्छिक पाठ्यक्रम : गणित

एम.टी.ई.-11 : प्रायिकता और सांख्यिकी

समय : 2 घण्टे *अधिकतम अंक : 50*

भारिता : 70%

नोट : *प्रश्न संख्या 7 करना अनिवार्य है। प्रश्न संख्या 1 से 6 में से* ***कोई चार*** *प्रश्न कीजिए। कैलकुलेटर का प्रयोग करने की अनुमति नहीं हैं।*

1. (a) एक बंटन का माध्य 10, प्रसरण 16, $b_1=1$ और $b_2=4$ हैं। मूल बिन्दु के सापेक्ष पहले चार आघूर्ण प्राप्त कीजिए। 5

(b) मान लीजिए $X_1, X_2, ..., X_n$ निम्नलिखित प्रायिकता घनत्व फलन वाली समष्टि से लिया गया एक यादृच्छिक प्रतिदर्श है। 5

$$f(x, \theta) = \frac{1}{\theta} e^{-x/\theta}, \theta > 0, x > 0$$ दर्शाइए कि

$$\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$$ θ के लिए अनभिनत है, और

$\text{var}\left(\overline{X}\right) = \frac{\theta^2}{n}$ है। जाँच कीजिए कि $\text{var}\left(\overline{X}\right)$ क्रैमर राव निम्न परिबन्ध तक पहुंचता है।

2. (a) मान लीजिए कि असंतत यादृच्छिक चरों X और Y का संयुक्त प्रायिकता फलन निम्नलिखित है। 6

$$f\,(x,\ y) = \frac{1}{4},\ (x,\ y) = (-3, -5),\ (-1, -1),$$

(1, 1) और (3, 5)

E(X), E(Y), E(XY), var (X) और X और Y के बीच सहसंबंध गुणांक ज्ञात कीजिए जाँच कीजिए कि X और Y स्वतन्त्र हैं।

(b) मान लीजिए $X \sim N\,(\mu, 4)$, जहाँ μ अज्ञात है। परीक्षण $H_0 : \mu = -1$ विरूद्ध $\mu = 1$ के लिए प्रतिदर्श का आमाप 10 और क्रांतिक प्रदेश $x_1 + 2x_2 + 3x_3 + - - + 10x_{10} \geq 0$ है। परीक्षण का आमाप ज्ञात कीजिए। परीक्षण की क्षमता भी ज्ञात कीजिए। 4

3. (a) यदि x_i, i = 1, 2, 3 समान मानक विचलन वाले तीन असहसबंधित चर हैं तो $(X_1 + X_2)$ और $(X_2 + X_3)$ के बीच सहसंबंध गुणांक ज्ञात कीजिए। 4

(b) एक शहर में 8000 स्नातकों में से 800 महिलाएं हैं, और 1600 स्नातक कर्मचारियों में से 1480 पुरूष हैं। 5% सार्थकता स्तर पर परीक्षण कीजिए कि क्या नियुक्ति होने में पुरूष या महिलाओं में अन्तर किया गया है। (आप निम्न मानों का प्रयोग कर सकते है। 6

$\chi^2_{0.05}$ (1 d.f) = 3.841, $\chi^2_{0.05}$ (2 d.f) = 5.991,

$\chi^2_{0.05}$ (3 d.f) = 7.815

4. (a) मान लीजिए कि निर्मित की जाने वाली चौखट का प्रयोग किये जाने वाले व्यक्तियों की ऊँचाई मध्य 70 इंच और मानक विचलन 3 इंच वाले प्रासामान्य बंटन में है। चौखट की वह ऊँचाई ज्ञात कीजिए जिससे कि 25% से अधिक व्यक्तियों के सिर उससे न टकरायें। यदि चौखट की ऊँचाई 76 इंच है तो 5000 व्यक्तियों में से कितने व्यक्तियों के सिर चौखट से टकरायेगें। 5

(दिया गया है : $P(Z \leq 2) = .9772$,
$P(Z \leq 1) = 0.6834$).

(b) दो समाश्रयण रेखाएं $2X + 3Y - 8 = 0$ और $X + 2Y - 5 = 0$ हैं। ज्ञात कीजिए कि 5

(i) इनमें से कौन सी X पर Y समाश्रयण रेखा है?

(ii) X और Y के बीच सहसंबंध गुणांक

(iii) $E(X/Y = 1)$.

(iv) X और Y का माध्य।

5. (a) मान लीजिए कि A और B दो थैले हैं। A में n सफेद और 2 काली और B में 2 सफेद और n काली गेंदे हैं। दोनों थैलों में से एक थैला यादृच्छया चुना जाता है, और इसमें से बिना विस्थापन के दो गेंदें निकाली जाती हैं। यदि दोनों निकाली गयी गेंदें सफेद है और वह प्रायिकता कि गेंदें थैले A में से निकाली गयी हैं, $\frac{6}{7}$ है तो n का मान ज्ञात कीजिए। 5

(b) मान लीजिए कि X_i, $i=1, 2, .., n$ एक यादृच्छिक प्रतिदर्श है, जिसके लिए $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$; $x > 0$. $2\lambda n \overline{X}$ का प्रायिकता घनत्व फलन ज्ञात कीजिए जहाँ 5

$\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ हैं। इसका बंटन भी पहचानिए।

6. (a) मान लिजिए कि (X, Y) का संयुक्त घनत्व फलन 3

निम्नलिखित है। $f(x, y) = \frac{x+y}{3}, \begin{array}{l} 0 < x < 1 \\ 0 < y < 2 \end{array}$ जाँच

कीजिए कि X और Y स्वतंत्र हैं या नहीं।

(b) यदि X एक प्वासां चर इस प्रकार है कि $P(X=2) = 9\,P(X=4) + 90\,P(X=6)$ 4

निम्नलिखित ज्ञात कीजिए।

(i) X का माध्य

(ii) बैषम्य गुणांक

(c) मान लिजिए कि $X_1, X_2, ..., X_n$ परिमित माध्य μ और परिमित प्रसरण σ^2 वाले बंटन से लिया गया एक यादृच्छिक प्रतिदर्श है। दिखाइए कि μ के लिए 3

$$T(X_1, X_2, ... X_n) = \frac{2}{n(n+1)}\sum_{i=1}^{n} i X_i$$ अनभिनत

है।

7. निम्नलिखित में से कौन से कथन सत्य या असत्य है। अपने उत्तरों के कारण दीजिए। **5x2=10**

(a) $n=2$ के लिए X और Y के बीच सहसंबंध गुणांक शून्य है जबकि (X, Y), (5.4, 6) और (10.8, 6) हैं।

(b) क्रातिंक प्रदेश के आमाप और सार्थकता स्तर समान होते है।

(c) यदि X_i, $i=1, 2, __n$, N (μ, 1) से लिया गया एक यादृच्छिक प्रतिदर्श है तो $\sum_{i=1}^{n}\left(X_i-\overline{X}\right)^2$ भी प्रासामान्य बंटन में होगा।

(d) दो समान प्राचल वाले स्वतंत्र, गुणोत्तर चरों के योग का बंटन हाइपर ज्योमेट्रिक होता है।

(e) P (B|A) < P (B). P ($A\cap B$).