

BACHELOR'S DEGREE PROGRAMME

Term-End Examination

December, 2012

ELECTIVE COURSE : MATHEMATICS

MTE-08 : DIFFERENTIAL EQUATIONS

Time : 2 hours

Maximum Marks : 50

(Weightage 70%)

Note : Q. No. 1 is compulsory. Attempt any four questions out of the remaining questions 2-7. Calculators are not allowed.

1. State whether the following statements are *True* or *False*. Justify your answer with the help of a short proof or a counter example : 5x2=10

(a) If $\left(\frac{1}{y^4}\right)$ is the integrating factor of the

differential equation

$$(2xy^4e^y + 2xy^3 + y) dx + (x^2y^4e^y - x^2y^2 - 3x) dy = 0,$$

then its solution is $x^2e^y + \frac{x^2}{y} + \frac{x}{y^3} = c,$

where c is a constant.

- (b) Solution of the differential equation

$$\frac{d^4y}{dx^4} + \frac{d^2y}{dx^2} = 0,$$

satisfying the conditions

$$y(0) = y'(0) = y''(0) = 0, \text{ and } y'''(0) = 1, \text{ is } y = x - \sin x.$$

- (c) The homogeneous Pfaffian differential equation $z^3(x^2y - y^2z)dx + x^3(y^2z - z^2y)dy + y^3(z^2x - x^2y)dz = 0$ is integrable.
- (d) Equation

$$\sin(x + 2y)p + \cos(2x - 3y)q = z - \frac{1}{z} \text{ is linear.}$$

- (e) Equation $(1 - y)u_{xx} + 2(1 - x)u_{xy} + (1 + y)u_{yy} + yu_x + xu_y = 0$ is hyperbolic outside the circle $(x - 1)^2 + y^2 = 1$.

2. (a) Solve the following differential equations :

(i) $(x^3 - 3xy^2)dx + (y^3 - 3x^2y)dy = 0$ 2

(ii) $(D^4 + 2D^2 + 1)y = \cos 2x$. 3

- (b) Show that there is no set of surfaces 3
orthogonal to the curves given by

$$\frac{dx}{z} = \frac{dy}{x + y} = \frac{dz}{1}$$

- (c) Find the particular integral of the equation 2
 $(D - D'^2)z = x$.

3. (a) The rate at which the ice melts is proportional to the amount of ice at the instant. Find the amount of ice left after two hours if half of the quantity melts in 30 minutes. 4
- (b) Solve : $(D^2 - 6D + 13)y = 8e^{3x}\sin 4x + 3^x$. 4
- (c) The initial value problem 2

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2}{x}y, y(0) = 0$$

has two solutions $y=0$ and $y=x^2$. Does this result violates existence and uniqueness theorem ? Give reasons for your answer.

4. (a) Prove that the solutions of the differential 3

equation $\frac{dy}{dx} - \frac{dx}{dy} = \frac{x}{y} - \frac{y}{x}$

are given by $xy = c_1$ and $(x^2 - y^2) = c_2$, where c_1 and c_2 are constants.

- (b) By changing the dependent variable reduce the following equation to normal form and obtain its solution : 4

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 4x\frac{dy}{dx} + (4x^2 - 1)y = -3e^{x^2}\sin 2x$$

- (c) Obtain only one solution of the differential equations : 3

$$\frac{dx}{x(4y^3 - 5x^3)} = \frac{dy}{y(2y^3 - x^3)} = \frac{dz}{18z(x^3 - y^3)}$$

5. (a) Using the method of variation of parameters 4

solve $\frac{d^2y}{dx^2} - y = \frac{2}{1 + e^x}$.

- (b) What exactly is the advantage of transforming $f(x, y, z, p, q) = 0$, to 2

$$F\left(x, y, z, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z}\right) = 0? \quad \text{For the}$$

equation $z + 2u_3 - (u_1 + u_2)^2 = 0$, write down the auxiliary equations.

- (c) Solve : $(x^2D^2 - y^2D'^2 + xD - yD')z = 6xy^2$. 4

6. (a) Find the general integral of the equation 4

$$(3z^2 - 2yz - 2y^2)p + x(2y + z)q = x(y - 3z).$$

- (b) Find the complete integral of the partial differential equation : 6

$$z = px + q + \frac{pq}{y}$$

7. (a) Solve the wave equation

6

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

under the conditions :

$u = 0$, when $x = 0$ and $x = \pi$,

$$\frac{\partial u}{\partial t} = 0, \text{ when } t = 0 ; u(x, 0) = x, 0 < x < \pi.$$

(b) Solve :

4

$$\frac{dy}{dx} + \left(\frac{x}{1-x^2} \right) y = x\sqrt{y}, y(0) = 1.$$

स्नातक उपाधि कार्यक्रम

सत्रांत परीक्षा

दिसम्बर, 2012

ऐच्छिक पाठ्यक्रम : गणित

एम.टी.ई.-08 : अवकल समीकरण

समय : 2 घण्टे

अधिकतम अंक : 50

(कुल का : 70%)

नोट : प्रश्न सं. 1 अनिवार्य है। शेष प्रश्न 2 से 7 में से किन्हीं चार प्रश्नों के उत्तर दीजिए। कैलकुलेटर्स का प्रयोग करने की अनुमति नहीं है।

1. बताइए निम्नलिखित कथन सत्य हैं या असत्य प्रत्युदाहरण अथवा संक्षिप्त उपपत्ति की सहायता से अपने उत्तर की पुष्टि कीजिए :

5x2=10

- (a) यदि $\left(\frac{1}{y^4}\right)$ अवकल समीकरण $(2xy^4e^y + 2xy^3 + y)$

$dx + (x^2y^4e^y - x^2y^2 - 3x)dy = 0$ का समाकलन

गुणक है तो इसका हल $x^2e^y + \frac{x^2}{y} + \frac{x}{y^3} = c$ होगा

जहाँ c अचर है।

- (b) प्रतिबंधों $y(0) = y'(0) = y''(0) = 0$, और $y'''(0) = 1$, को संतुष्ट करता हुआ अवकल समीकरण

$$\frac{d^4 y}{dx^4} + \frac{d^2 y}{dx^2} = 0$$

का हल $y = x - \sin x$ है।

- (c) समघात फैफियन अवकल समीकरण

$$z^3(x^2y - y^2z) dx + x^3(y^2z - z^2x) dy + y^3(z^2x - x^2y) dz = 0 \text{ समाकलनीय है।}$$

- (d) समीकरण

$$\sin(x + 2y)p + \cos(2x - 3y)q = z - \frac{1}{z} \text{ रैखिक है।}$$

- (e) समीकरण $(1 - y)u_{xx} + 2(1 - x)u_{xy} + (1 + y)u_{yy} + yu_x + xu_y = 0$ वृत्त $(x - 1)^2 + y^2 = 1$ के बाहर अतिपरवलयिक है।

2. (a) निम्नलिखित अवकल समीकरणों के हल प्राप्त कीजिए :

(i) $(x^3 - 3xy^2)dx + (y^3 - 3x^2y)dy = 0$ 2

(ii) $(D^4 + 2D^2 + 1)y = \cos 2x$. 3

- (b) दिखाइए कि पृष्ठों का कोई भी समुच्चय 3

$$\frac{dx}{z} = \frac{dy}{x + y} = \frac{dz}{1}$$

द्वारा प्राप्त वक्र के लंबकोणीय नहीं हैं।

- (c) समीकरण $(D - D'^2)z = x$ का विशेष समाकल ज्ञात कीजिए। 2

3. (a) बर्फ़ के पिघलने की दर उस समय प्राप्त बर्फ़ की मात्रा 4
के समानुपाती है। यदि बर्फ़ की आधि मात्रा 30 मिनट
में पिघल जाती हो तो दो घंटे बाद बची हुई बर्फ़ की मात्रा
ज्ञात कीजिए।
- (b) हल कीजिए : $(D^2 - 6D + 13)y = 8e^{3x}\sin 4x + 3^x$. 4
- (c) आदि मान समस्या 2

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2}{x}y, y(0) = 0$$

के दो हल $y=0$ और $y=x^2$ हैं। क्या इस परिणाम से
अस्तित्व तथा अद्वितीयता प्रमेय का खंडन होता है?
अपने उत्तर के कारण बताइए।

4. (a) सिद्ध कीजिए कि अवकल समीकरण 3

$$\frac{dy}{dx} - \frac{dx}{dy} = \frac{x}{y} - \frac{y}{x}$$

के हल $xy = c_1$ और $(x^2 - y^2) = c_2$ द्वारा प्राप्त हैं जहाँ
 c_1 और c_2 अचर हैं।

- (b) परतंत्र चर में परिवर्तन करके समीकरण 4

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 4x \frac{dy}{dx} + (4x^2 - 1)y = -3e^{x^2} \sin 2x$$

को प्रसामान्य रूप में परिवर्तित कीजिए और उसका हल
प्राप्त कीजिए।

(c) अवकल समीकरणों

3

$$\frac{dx}{x(4y^3 - 5x^3)} = \frac{dy}{y(2y^3 - x^3)} = \frac{dz}{18z(x^3 - y^3)}$$

का केवल एक हल प्राप्त कीजिए।

5. (a) प्राचल विचरण विधि से समीकरण

4

$$\frac{d^2y}{dx^2} - y = \frac{2}{1 + e^x} \text{ का हल प्राप्त कीजिए।}$$

(b) $f(x, y, z, p, q) = 0$ को

2

$$F\left(x, y, z, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z}\right) = 0 \text{ में रूपान्तरित}$$

करने का लाभ क्या है?

समीकरण $z + 2u_3 - (u_1 + u_2)^2 = 0$ के सहायक समीकरण लिखिए।

(c) हल कीजिए: $(x^2D^2 - y^2D'^2 + xD - yD')z = 6xy^2$

4

6. (a) समीकरण

4

$$(3z^2 - 2yz - 2y^2)p + x(2y + z)q = x(y - 3z)$$

का व्यापक समाकल ज्ञात कीजिए।

(b) आंशिक अवकल समीकरण

6

$$z = px + q + \frac{pq}{y} \text{ का पूर्ण समाकल ज्ञात कीजिए।}$$

7. (a) प्रतिबंधों

6

$u=0$, जबकि $x=0$ और $x=\pi$,

$\frac{\partial u}{\partial t} = 0$, जबकि $t=0$; $u(x, 0) = x$, $0 < x < \pi$

के अधीन तरंग समीकरण

$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ का हल प्राप्त कीजिए।

(b) हल कीजिए :

4

$\frac{dy}{dx} + \left(\frac{x}{1-x^2} \right) y = x\sqrt{y}$, $y(0) = 1$.
