No. of Printed Pages : 8

MTE-07

01270

BACHELOR'S DEGREE PROGRAMME (BDP)

Term-End Examination

December, 2012

ELECTIVE COURSE : MATHEMATICS

MTE-07 : ADVANCED CALCULUS

Time : 2 hours *Maximum Marks : 50*

Weightage 70%

Note : *Q. no. 1 is **compulsory**. Attempt **any four** questions from the remaining. No calculators are allowed.*

1. State whether the following statements are true or false. Give reasons for your answers. **5x2=10**

(a) The level curve of the paraboloid $z = x^2 + y^2$, passing through (3, 0, 9) is a parabola.

(b) The function $f(x, y) = x^2 - y^2$ has a saddle point at (0, 0).

(c) The region inside the unit circle in the first quadrant is a region of both Type I and Type II.

(d) The set $A = \left\{x + \frac{1}{x}, 0 < x < 2\right\}$ is a bounded set in R.

(e) The domain of the function f/g, where $f = x^2 + y^2$ and $g = 2xy$ is $R^2 - \{(0, 0)\}$.

2. (a) Use chain rule to find $\frac{du}{dt}$, if 5

$u = \frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x}$, and $x = e^t$, $y = e^{t^2}$,

$z = e^{t^3}$. Find its value at $t = 1$.

(b) Evaluate $\iint_D l_n (x^2 + y^2)\, dx\, dy$, where D is the region in the first quadrant between $x^2 + y^2 = 1$ and $x^2 + y^2 = 4$. 5

3. (a) Reverse the order of integration and integrate : 5

$$\int_0^2 \int_{y/2}^1 (x + y)^2 \, dx \, dy.$$

(b) Show that the equation $x^5 + y^5 - 16x^3y - 1 = 0$ determines a solution ϕ around the point $x = 1$ such that $\phi(1) = 2$. Find the first derivative of the solution and its value at (1, 2). 5

4. (a) Show that (0, 0) is a stationary point of $z = (x^2 + y^2)\cos(x + 2y)$. Is it local minimum or maximum ? Justify your answer. 5

(b) Find the work done by a Force $F = (x^2, -xy)$ in moving a particle from (0, 0) to (1, 2) along the parabola $y = 2x^2$ from (0, 0) to (1, 2). 5

5. (a) (i) Evaluate the limit : 2+3=5

$$\lim_{x \to \pi/4} \frac{\sin x - \cos x}{x - \pi/4}$$

(ii) Find the value of t for which

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x + te^{-x} - 2x}{1 - \cos x}$$ is finite. Find the value of that limit.

(b) Find the second Taylor polynomial for $f(x, y) = e^{xy}\cos x$ about $(0, \pi/2)$. 5

6. (a) Find the volume below the plane $z = 1 - y$ and inside the cylinder $x^2 + y^2 = 1$, $0 \leq z \leq 1$. 5

(b) If $$f(x, y) = \begin{cases} x \sin\frac{1}{x} + y \sin\frac{1}{y}, & xy \neq 0 \\ 0, & xy = 0, \end{cases}$$ 5

show that f is continuous at (0, 0). Find $f_x(0, 0)$, if it exists.

7. (a) What are the domain and range of 2

$f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ defined by $f(x, y) = \ln x + \frac{1}{y}$.

(b) Evaluate f_{xy} at a point (x, y) for the function f defined by $f(x, y) = x\tan^{-1}y$. Using Schwarz's Theorem, evaluate f_{yx} at the point (x, y). 4

(c) Let f be a function defined by 4

$$f(x, y) = \left(\frac{|x|}{1 + |x|}, \frac{|y|}{1 + |y|} \right)$$

Check whether the composition gof exists, where $g : \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 4\} \to \mathbf{R}$ is defined by $g(x, y) = xy$. Find gof.

स्नातक उपाधि कार्यक्रम (बी.डी.पी)

सत्रांत परीक्षा

दिसम्बर, 2012

ऐच्छिक पाठ्यक्रम : गणित

एम.टी.ई.-07 : उच्च फलन

समय : 2 घण्टे *अधिकतम अंक : 50*

कुल का 70%

नोट : *प्र. स.1* ***अनिवार्य*** *है। शेष में से* ***किन्हीं चार*** *प्रश्नों के उत्तर दीजिए। कैलकुलैटरों का प्रयोग करने की अनुमति नहीं है।*

1. बताइए कि निम्नलिखित कथन सत्य हैं या असत्य। अपने उत्तरों के कारण बताइए। **5x2=10**

   (a) (3, 0, 9) से गुज़रने वाले परवलयज $z = x^2 + y^2$ का स्तर-वक्र परवलय है।

   (b) फलन $f(x, y) = x^2 - y^2$ का (0, 0) पर एक पल्याण बिन्दु होता है।

   (c) प्रथम चतुर्थांश में एकक वृत्त के भीतर का प्रदेश प्रकार - I और प्रकार - II, दोनों प्रकार के हैं।

   (d) समुच्चय $A = \left\{x + \frac{1}{x}, 0 < x < 2\right\}$, R में एक परिबद्ध समुच्चय है।

   (e) फलन f/g का प्रांत $R^2 - \{(0, 0)\}$ है, जहाँ $f = x^2 + y^2$ और $g = 2xy$ है।

2. (a) शृंखला नियम द्वारा $\frac{du}{dt}$ ज्ञात कीजिए, यदि 5

$u = \frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x}$ और $x = e^t$, $y = e^{t^2}$ और

$z = e^{t^3}$ है। $t = 1$ इसका मान ज्ञात कीजिए।

(b) $\iint_D l_n(x^2 + y^2)\,dx\,dy$ का मूल्यांकन कीजिए, जहाँ 5

D, $x^2 + y^2 = 1$ और $x^2 + y^2 = 4$ के बीच प्रथम चतुर्थांश में स्थित प्रदेश है।

3. (a) निम्नलिखित समकलन के क्रम में परिवर्तन करने के 5
बाद समाकलित कीजिए :

$$\int_0^2 \int_{y/2}^1 (x + y)^2\,dx\,dy$$

(b) दिखाइए कि समीकरण $x^5 + y^5 - 16x^3y - 1 = 0$ से 5
बिन्दु $x = 1$ के आसपास एक ऐसा हल ϕ प्राप्त होता है जिसके लिए $\phi(1) = 2$ है। हल का प्रथम अवकलज ज्ञात कीजिए और (1, 2) पर उसका मान भी ज्ञात कीजिए।

4. (a) दिखाइए कि (0, 0), $z = (x^2 + y^2)\cos(x + 2y)$ का 5
स्तब्ध बिन्दु है। क्या यह स्थानिक निम्निष्ठ है या उच्चिष्ठ ?

(b) परवलय $y = 2x^2$ के अनुदिश बल $F = (x^2, -xy)$ द्वारा (0, 0) से (1, 2) तक एक कण को ले जाने में किया गया कार्य मालूम कीजिए। 5

5. (a) (i) निम्नलिखित सीमा का मूल्यांकन कीजिए : 2+3=5

$$\lim_{x \to \pi/4} \frac{\sin x - \cos x}{x - \pi/4}$$

(ii) t का ऐसा मान ज्ञात कीजिए जिसके लिए

$\lim_{x \to 0} \frac{e^x + te^{-x} - 2x}{1 - \cos x}$ परिमित है। उस सीमा का मान भी ज्ञात कीजिए।

(b) $(0, \pi/2)$ पर $f(x, y) = e^{xy}\cos x$ के लिए द्वितीय टेलर बहुपद ज्ञात कीजिए। 5

6. (a) समतल $z = 1 - y$ के नीचे और बेलन $x^2 + y^2 = 1$, $0 \leq z \leq 1$ के अंदर का आयतन ज्ञात कीजिए। 5

(b) यदि $f(x, y) = \begin{cases} x \sin\frac{1}{x} + y \sin\frac{1}{y}, & xy \neq 0 \\ 0, & xy = 0 \end{cases}$, 5

तब दिखाइए कि f, (0, 0) पर संतत है। $f_x(0, 0)$ का यदि अस्तित्व है तो यह भी ज्ञात कीजिए।

7. (a) $f(x, y) = \ln x + \frac{1}{y}$ द्वारा परिभाषित $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ 2

के प्रांत और परिसर क्या हैं ?

(b) $f(x, y) = x\tan^{-1}y$ द्वारा परिभाषित फलन f के लिए किसी बिन्दु (x, y) पर f_{xy} का मूल्यांकन कीजिए। श्वार्ज प्रमेय द्वारा बिन्दु (x, y) पर f_{yx} का मूल्यांकन कीजिए। 4

(c) मान लीजिए f 4

$$f(x, y) = \left(\frac{|x|}{1 + |x|}, \frac{|y|}{1 + |y|} \right)$$

द्वारा परिभाषित फलन है। जाँच कीजिए कि संयुक्त फलन gof का आस्तित्व है या नहीं, जहाँ $g : \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 4\} \to \mathbf{R}$, $g(x, y) = xy$ द्वारा परिभाषित है। gof ज्ञात कीजिए।