No. of Printed Pages : 8

MTE-02

02110

BACHELOR'S DEGREE PROGRAMME (BDP)

Term-End Examination

December, 2012

ELECTIVE COURSE : MATHEMATICS

MTE-02 : LINEAR ALGEBRA

Time : 2 hours | *Maximum Marks : 50*

(Weightage 70%)

Note : *Q. No. 7 is **compulsory**. Attempt **any four** questions from Q. No. **1** to **6**. Calculators are **not** allowed.*

---

1. (a) Check whether the set $S = \{(a_1, a_2, ..., a_n) \in \mathbf{R} \mid a_1 \geq 0\}$ is a subspace of $\mathbf{R}^n$ or not. **3**

   (b) If v_1, v_2, v_3 are linearly independent vectors in a vector space V over **C** then show that $v_1 + v_2,\ v_2 + v_3,\ v_3 + v_1$, are also linearly independent. **2**

   (c) Let $B = \{(1,0,1), (0, 1, -2), (-1, -1, 0)\}$ be a basis of $\mathbf{R}^3$. Find the dual basis of B. **5**

2. (a) Let T be a linear operator on $\mathbf{R}^3$, for which the matrix in the standard ordered basis B is : **5**

$$[T]_B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 4 \end{bmatrix}.$$

   Find the range of T and the null space of T.

(b) Find the adjoint of the matrix **5**

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}.$$

Hence find its inverse.

3. (a) Let T be the linear operator on $\mathbf{R}^3$ defined by $T(x_1, x_2, x_3) = (3x_1, x_1, -x_2, 2x_1 + x_2 + x_3)$. Find the matrix A of T with respect to the standard basis. Check whether T is invertible or not. If yes, find the inverse of A by row reduction. If T is not invertible, find Ker (T). **5**

(b) Reduce the conic $5x_1^2 - 6x_1 x_2 + 5x_2^2 = \sigma$ to standard form and hence identify it. Also find the associated co-ordinate transformation. **5**

4. (a) Let (V, <, >) be an inner product space and let $T \epsilon A(V)$. Prove that the following conditions are equivalent. **4**

(i) $T^*T = I$

(ii) $<Tx, Ty> = <x,y>$ for all $x, y \epsilon V$

(iii) $||Tx|| = ||x||$ for all $x \epsilon V$.

(b) Find the eigen values and bases for the eigen spaces of the matrix. 5

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 4 \end{bmatrix}.$$

(c) Check whether the matrix $\begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$ is unitary. 1

5. (a) Find the minimal polynomial of the matrix 3

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 0 \end{bmatrix}.$$

(b) Complete the set {(1, 0, 1), (0, 1, 0)} to form a basis of $\mathbf{R}^3$. Convert this into an orthonormal basis with respect to standard inner product using the Gram - Schimdt orthogonalisation process. 5

(c) Let W_1 and W_2 be subspaces of a finite dimensional vector space V. Show that, if $\dim (W_1) + \dim(W_2) > \dim (V)$ then $\dim (W_1 \cap W_2) \neq 0$. 2

6. (a) Find the radius of the circular section of the sphere $|r| = 15$ by the plane $r(i + j + k) = 12\sqrt{3}$. 3

(b) In $\mathbf{R}^3$, let $W_1 = \{(x_1, x_2, x_3) / 2x_1 + x_2 - x_3 = 0\}$ and $W_2 = \{(x_1, x_2, x_3) / x_1 = x_3\}$. Check whether W_1 and W_2 are subspaces of $\mathbf{R}^3$ or not. Also find $W_1 \cap W_2$. 4

(c) Let a quadratic form have expression $3x^2 + 6xy - 5y^2$ with respect to the standard basis $\{(1, 0), (0, 1)\}$ of $\mathbf{R}^3$. Find its expression with respect to the basis $\{(2, 1), (1, -2)\}$. 3

7. Which of the following statements are true and which are false ? Justify your answer with a short proof or by a counter example. 10

(a) The eigen values of a self adjoint operator on an inner product space are all real.

(b) Every unitary matrix is Hermitian.

(c) If $S_1 \leq S_2$ are subsets of a vector space and S_1 is linearly independent, S_2 is also linearly independent.

(d) For any linear transformation $T : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^2$, $\ker(T) \neq \{0\}$.

(e) There is a linear operator T with characteristic polynomial $(x-1)^2 (x-2)$ and minimal polynomial $(x-1)^2$.

एम.टी.ई.-02

स्नातक उपाधि कार्यक्रम (बी.डी.पी.)

सत्रांत परीक्षा

दिसम्बर, 2012

ऐच्छिक पाठ्यक्रम : गणित

एम.टी.ई.-02 : रैखिक बीजगणित

समय : 2 घण्टे *अधिकतम अंक : 50*

(कुल का 70%)

नोट : *प्रश्न संख्या 7 **अनिवार्य** है। प्रश्न संख्या 1 से 6 में से **किन्हीं चार** प्रश्नों को कीजिए। कैलकुलेटरों के प्रयोग की अनुमति **नहीं** है।*

1. (a) जाँच कीजिए कि समुच्चय $S = \{(a_1, a_2, ..., a_n) \in \mathbf{R} \mid a_1 \geq 0\}$, $\mathbf{R}^n$ की उपसमष्टि है या नहीं। 3

(b) यदि v_1, v_2, v_3, $\mathbf{C}$ पर सदिश समष्टि में रैखिकत: स्वतंत्र हैं, तब दिखाइए कि $v_1 + v_2, v_2 + v_3, v_3 + v_1$ भी रैखिकत: स्वतंत्र हैं। 2

(c) मान लीजिए $B = \{(1,0,1), (0, 1, -2), (-1, -1,0)\}$, $\mathbf{R}^3$ का आधार है। तब B का द्वैत आधार ज्ञात कीजिए। 5

2. (a) मान लीजिए T, $\mathbf{R}^3$ पर रैखिक संकारक है, जिसके लिए मानक क्रमित आधार B के सापेक्ष आव्यूह है : 5

$$[T]_B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 4 \end{bmatrix}.$$

T की परिसर और T की शून्य समष्टि ज्ञात कीजिए।

(b) निम्नलिखित आव्यूह का सहखंडन ज्ञात कीजिए : 5

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}.$$

इस तरह इसका प्रतिलोम ज्ञात कीजिए।

3. (a) मान लीजिए T, $\mathbf{R}^3$ पर 5

$T(x_1, x_2, x_3) = (3x_1, x_1 - x_2, 2x_1 + x_2 + x_3)$ द्वारा परिभाषित रैखिक संकारक है। मानक आधार के सापेक्ष T का आव्यूह A ज्ञात कीजिए। जाँच कीजिए कि T व्युत्क्रमणीय है या नहीं। यदि है, तो पंक्ति समानयन द्वारा A का प्रतिलोम ज्ञात कीजिए। यदि T व्युत्क्रमणीय नहीं है तो Ker (T) ज्ञात कीजिए।

(b) शंकु $5x_1^2 - 6x_1 x_2 + 5x_2^2 = \sigma$ को मानक रूप तक समानीत कीजिए और इस तरह इसे पहचानिए। संबंधित निर्देशांक रूपांतरण भी ज्ञात कीजिए। 5

4. (a) मान लीजिए (V, <, >) एक आंतर गुणनफल समष्टि है और $T \in A(V)$. सिद्ध कीजिए कि निम्नलिखित प्रतिबंध तुल्य है : 4

(i) $T^*T = I$

(ii) सभी $x, y \in V$ के लिए $\langle Tx, Ty \rangle = \langle x, y \rangle$.

(iii) सभी $x \in V$ के लिए $\|Tx\| = \|x\|$.

(b) आव्यूह **5**

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

A आइगेनमान और आइगेन समष्टियों के लिए आधार ज्ञात कीजिए।

(c) जाँच कीजिए कि आव्यूह $\begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$ ऐकिक है या नहीं। **1**

5. (a) निम्नलिखित आव्यूह का अल्पिष्ठ बहुपद ज्ञात कीजिए : **3**

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 0 \end{bmatrix}.$$

(b) $\mathbf{R}^3$ का आधार बनाने के लिए समुच्चय {(1, 0, 1), (0, 1, 0)} को पूरा कीजिए। ग्राम-श्मिट लांबिकीकरण प्रक्रम का प्रयोग करके मानक आंतर गुणनफल के सापेक्ष इस आधार को प्रसामान्य आधार में परिवर्तित कीजिए। **5**

(c) मान लीजिए W_1 और W_2 परिमित विम सदिश समष्टि V की उपसमष्टियाँ हैं। दिखाइए यदि $\dim (W_1) + \dim(W_2) > \dim (V)$, तब $\dim (W_1 \cap W_2) \neq 0$. **2**

6. (a) समतल $r(i+j+k) = 12\sqrt{3}$ द्वारा गोले $|r| = 15$ के वृत्तीय परिच्छेद की त्रिज्या ज्ञात कीजिए। **3**

(b) $\mathbf{R}^3$ में, $W_1 = \{(x_1, x_2, x_3) / 2x_1 + x_2 - x_3 = 0\}$ और $W_2 = \{(x_1, x_2, x_3) / x_1 = x_3\}$. जाँच कीजिए कि W_1 और W_2, $\mathbf{R}^3$ की उपसमष्टियाँ हैं या नहीं। $W_1 \cap W_2$ भी ज्ञात कीजिए। **4**

(c) मान लीजिए एक द्विघाती समघात में $\mathbf{R}^3$ के मानक आधार $\{(1, 0), (0, 1)\}$ के सापेक्ष व्यंजक $3x^2 + 6xy - 5y^2$ है। आधार $\{(2, 1), (1, -2)\}$ के सापेक्ष इसका व्यंजक ज्ञात कीजिए। **3**

7. निम्नलिखित में से कौन से कथन सत्य हैं और कौन से असत्य? लघु उपपति या प्रति–उदाहरण के द्वारा अपने उत्तर की पुष्टि कीजिए : **10**

(a) आंतर गुणनफल समष्टि पर स्वसंलग्न संकारक के सभी आइगेनमान वास्तविक होते हैं।

(b) प्रत्येक ऐकिक आव्यूह हर्मिटी होता है।

(c) यदि $S_1 \leq S_2$ सदिश समष्टि के उपसमुच्चय हैं और S_1 रैखिकत: स्वतंत्र है, तब S_2 भी रैखिकत: स्वतंत्र होगा।

(d) किसी भी रैखिक रूपांतरण $T : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^2$ के लिए $\ker(T) \neq \{0\}$.

(e) अभिलक्षणिक बहुपद $(x-1)^2 (x-2)$ और अल्पिष्ठ बहुपद $(x-1)^2$ वाला एक रैखिक रूपांतरण T होता है।
