No. of Printed Pages : **11**

MTE-14

BACHELOR'S DEGREE PROGRAMME (BDP)

Term-End Examination

December, 2013

ELECTIVE COURSE : MATHEMATICS
MTE-14 : MATHEMATICAL MODELLING

Time : 2 hours | *Maximum Marks : 50*
Weightage 70%

Note : *Answer **any five** questions. Use of Calculator is **not allowed.***

---

1. (a) Suppose that a string of length l is connected to fixed point at one end and to a stick of mass m at the other. The stick is whirling in a circle at constant velocity v. Using dimensional analysis find the equation of the force in the string. **4**

(b) A particle is moving with S.H.M in a straight line. When the distance of particle from the equilibrium position has the values x_1 and x_2, the corresponding values of the velocity are v_1 and v_2. Show that the time period is : **6**

$$2\pi\sqrt{\frac{x_2^2 - x_1^2}{v_1^2 - v_2^2}}.$$

Also find the amplitude and maximum velocity of the particle.

2. (a) Explain the following giving an example of each. **4**

(i) Static and dynamic models.

(ii) Discrete and continuous models.

(b) The population of fish in a reservoir is affected by both fishing and restocking. The proportionate birth rate is constant at 0.45 per year and the proportionate death rate is constant at 0.65 per year. The reservoir is restocked at a constant rate of 3000 fish per year and fishermen are allowed to catch 2500 fish per year. Derive a model for the fish population, and solve it. Describe the long term behaviour of the fish population in the two cases when the initial population is 2000 or 8000. **6**

3. (a) A TV repairman finds that the time spent on his jobs has an exponential distribution with mean 30 minutes. If he repairs sets in the order in which they come in and the arrival of sets is approximately Poisson with an average rate of 10 per 8 hours a day, what is the repairman's expected idle time each day ? How many jobs are expected ahead of the set just brought in ? **4**

(b) Suppose the population x and y satisfy the equations : **6**

$$\frac{dx}{dt} = 60x - 4x^2 - 3xy$$

$$\frac{dy}{dt} = 42y - 2y^2 - 3xy$$

Find all the critical points of the system. Which critical point represents the possibility of co-existence of two species ? Discuss the type and stability of that critical point.

4. (a) The following differential equation describes the distribution of phytoplankton growth on our environment : 7

$$\frac{\partial C}{\partial t} = D \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} + \alpha C.$$

Here the symbols have their usual meanings.

(i) Find the solution of the differential equation above, under the following boundary conditions :

$C(x, 0) = 1$

$C(x, t) = 0$ at $x = 0$ and $x = L$.

(ii) Discuss the solution when

(1) $\alpha < \frac{D\pi^2}{L^2}$

(2) $\alpha > \frac{D\pi^2}{L^2}$

(iii) Define the critical size, and obtain an expression for it.

(b) If the time of a body's descent in a straight line towards a given point is directly proportional to the square of the distance fallen through, then show that the acceleration of the body is inversely proportional to the cube of the distance fallen through. 3

5. (a) The demand function for a particular commodity is $y = 15\, e^{-x/3}$, $0 \le x \le 8$, where y is the price per unit and x is the number of units demanded. Determine the price and the quantity for which the revenue is maximum. **5**

(b) Consider arterial blood viscosity $\mu = 0.025$ poise. If the length of the artery is 1.5 cm, radius 8×10^{-3} cm and $P = P_1 - P_2 = 4 \times 10^3$ dyne/cm^2 then find the : **5**

(i) maximum peak velocity of blood, and

(ii) the shear stress at the wall.

6. (a) A projectile is fired with a constant speed v at two different angles of projection α and β such that it gives the same range. Show that **3**

$\operatorname{cosec} \alpha = \sec \beta$.

(b) Two players A and B are involved in a game. Each player has three different strategies. The pay-off table is given below : **4**

$$\begin{array}{c} \\ \text{A} \end{array} \overset{\text{B}}{\begin{bmatrix} 5 & -7 & -17 \\ 4 & 6 & -15 \\ 9 & 10 & -13 \end{bmatrix}}$$

Find the saddle point and value of the game.

(c) Imagine a population governed by the logistic equation **3**

$$\frac{dx}{dt} = 2\left(1 - \frac{x}{100}\right)x$$

(i) Find the equilibrium level of this population.

(ii) Initially $(t=0)$ the population is 100 and it remains at this level till $t=10$, when an epidemic perturbs the population down to 80. Find the population at $t=15$.

7. (a) Consider the motion of a simple pendulum. Write the differential equation describing the motion of the simple pendulum with initial conditions $\theta=\theta_0$ at $t=0$ and $\frac{d\theta}{dt}=0$ at $t=0$, for both the linear and non-linear models. Give the expressions for the time periods for both the cases. In the linear case, derive the time period. Suppose the length of the pendulum is doubled, then find the time period of the pendulum in both the cases. 5

(b) Suppose the quarterly sales for a particular make of a car in Delhi were 2682, 2462 and 3012, respectively. From past data prior to these three data points, a straight line was the fit. The value on the line corresponding to the last observed time is 2988 and the slope is 80. Use exponential smoothing based upon the three observations given above to forecast sales for the quarterly period following these observations using $\alpha=\beta=0.2$ 5

स्नातक उपाधि कार्यक्रम (बी.डी.पी)

सत्रांत परीक्षा

दिसम्बर, 2013

ऐच्छिक पाठ्यक्रम : गणित

एम.टी.ई.-14 : गणितीय निदर्शन

समय : 2 घण्टे | *अधिकतम अंक : 50*
कुल का : 70%

नोट : ***किन्हीं पाँच*** *प्रश्नों के उत्तर दीजिए कैल्कुलेटर का प्रयोग करने की अनुमति* ***नहीं*** *है।*

---

1. (a) लंबाई l के एक धागे को एक सिरे पर नियत बिदुं से और दूसरे सिरे पर द्रव्यमान m की छड़ी से जोड़ा जाता है। छड़ी एकसमान वेग v पर वृत्ताकार घूम रही है। धागे में बल का समीकरण ज्ञात करने के लिए विभीय विश्लेषण का प्रयोग कीजिए। **4**

(b) एक कण सरल आवर्त गति (SHM) से एक सरल रेखा में गतिमान है। साम्यावस्था से जब कण की दूरी x_1 और x_2 होती है तो उसका वेग क्रमशः v_1 और v_2 होता है। दिखाईए कि आवर्त काल $2\pi\sqrt{\dfrac{x_2^2 - x_1^2}{v_1^2 - v_2^2}}$ है। कण का आयाम और अधिकतम वेग भी ज्ञात कीजिए। **6**

2. (a) प्रत्येक का उदाहरण देते हुए निम्नलिखित को स्पष्ट कीजिए। **4**

(i) स्थैतिक और गतिक निदर्श

(ii) असतंत और सतंत निदर्श।

(b) एक कुंड की मछलियाँ की संख्या पर मछली पकड़ने और पुन:स्थापन का प्रभाव पड़ता है। आनुपातिक जन्म-दर 0.45 प्रति वर्ष पर अचर बनी रहती है और आनुपातिक मृत्यु दर 0.65 प्रति वर्ष पर अचर बनी रहती है। कुंड को 3000 मछली प्रति वर्ष अचर दर से पुन:स्थापित किया जाता है और मछवारों को प्रति वर्ष 2500 मछलियाँ पकड़ने की अनुमति है। मछलियों की संख्या पर एक निदर्श बनाइए और उसे हल कीजिए। दो स्थितियों में, जबकि प्रारंभिक संख्या 2000 या 8000 हो, मछलियों की संख्या के दीर्घकालिक व्यवहार की व्याख्या कीजिए। **6**

3. (a) टेलीविज़न की मरम्मत करने वाले व्यक्ति को पता है कि उसके कार्यों पर लगने वाला समय 30 मिनट माध्य वाला चरघातांकी बटंन है। यदि वह सेटों की मरम्मत उनके आने के क्रमानुसार करता है और दिन में 8 घंटे की कार्य अवधि के दौरान आने वाले सेटों की औसत दर 10 है, जो लगभग प्वासों - बंटित है, तो प्रतिदिन उसके खाली बैठने का प्रत्याशित समय क्या होगा? आनेवाले सेट से पहले प्रत्याशा कितने सेटों की मरम्मत शेष होगी? **4**

(b) मान लीजिए समष्टियाँ x और y निम्नलिखित समीकरणों को संतुष्ट करती है : 6

$$\frac{dx}{dt} = 60x - 4x^2 - 3xy$$

$$\frac{dy}{dt} = 42y - 2y^2 - 3xy$$

निकाय के सभी क्रांतिक बिंदुओं को ज्ञात कीजिए। कौन सा क्रांतिक बिंदु दो स्पीशीज़ के सह-अस्तित्व की संभावना को निरूपित करता है? उस क्रंातिक बिंदु के प्रकार और स्थायित्व पर चर्चा कीजिए।

4. (a) निम्नलिखित अवकलनीय समीकरण हमारे पर्यावरण में फाइटोप्लैंकटन वृद्धि के बंटन का उल्लेख करता है : 7

$$\frac{\partial C}{\partial t} = D\frac{\partial^2 C}{\partial x^2} + \alpha C$$

यहाँ प्रतीकों के अर्थ सामान्य हैं।

(i) निम्नलिखित परिसीमा प्रतिबंधों के अंतर्गत उपर्युक्त अवकल समीकरण का हल ज्ञात कीजिए :

$C(x, 0) = 1$

$x = 0$ और $x = L$ पर $C(x, t) = 0$,

(ii) (1) $\alpha < \frac{D\pi^2}{L^2}$

(2) $\alpha > \frac{D\pi^2}{L^2}$

होने पर हल की विवेचना कीजिए।

(iii) क्रांतिक आमाप परिभाषित कीजिए और इसके लिए व्यंजक प्राप्त कीजिए।

(b) किसी पिंड को, दिए गए बिंदु की ओर, सरल रेखा में नीचे गिरने में लगा समय यदि नीचे गिरते हुए पिंड द्वारा तय की गयी दूरी के वर्ग के समानुपाती हो तो दिखाइए कि पिंड का त्वरण तय की गयी दूरी के घन के व्युत्क्रमानुपाती है। 3

5. (a) मान लीजिए कि एक विशिष्ट वस्तु का माँग फलन $y = 15\ e^{-x/3}$, $0 \leq x \leq 8$ है, जहाँ y प्रति इकाई कीमत और x इकाइयों की माँग संख्या है। वस्तु की कीमत व माँग मात्रा ज्ञात कीजिए जिससे कि आय अधिकतम हो। 5

(b) धमनी रक्त श्यानता $\mu = 0.025$ पॉयज है। यदि धमनी की लंबाई 1.5 cm, त्रिज्या 8×10^{-3} cm तथा $P = P_1 - P_2 = 4 \times 10^3$ dyne/cm^2 हो, तो : 5

(i) रक्त का अधिकतम शिखर वेग, तथा

(ii) दीवार पर अपरूपण प्रतिबल ज्ञात कीजिए।

6. (a) दो अलग - अलग प्रेक्षण कोणों α और β पर अचर गति v से एक प्रक्षेप्य इस प्रकार दागा जाता है कि वह समान परास देता है। दिखाइए कि 3

$\text{cosec}\ \alpha = \sec\ \beta$.

(b) दो खिलाड़ी A और B एक खेल खेल रहे हैं। प्रत्येक खिलाड़ी के पास तीन अलग-अलग युक्तियाँ हैं। भुगतान सारणी नीचे दी गई है : 4

$$\begin{array}{cc} & B \\ A & \begin{bmatrix} 5 & -7 & -17 \\ 4 & 6 & -15 \\ 9 & 10 & -13 \end{bmatrix} \end{array}$$

खेल का पलायन बिंदु और मान ज्ञात कीजिए।

(c) वृद्धिघात समीकरण $\frac{dx}{dt} = 2\left(1 - \frac{x}{100}\right)x$ द्वारा नियंत्रित समष्टि की कल्पना कीजिए। 3

(i) इस समष्टि का संतुलन स्तर ज्ञात कीजिए।

(ii) प्रारंभिकतः $(t=0)$ समष्टि 100 है और $t=10$ तक इस स्तर पर रहती है, जब तक कि महामारी के कारण समष्टि 80 तक नहीं आ जाती। $t=15$ पर समष्टि ज्ञात कीजिए।

7. (a) एक सरल लोलक की गति लीजिए। रैखिक और अरैखिक दोनों ही निदर्शों के लिए प्रारंभिक प्रतिबंधों $t = 0$ पर $\theta = \theta_0$ और $t = 0$ पर $\frac{d\theta}{dt} = 0$ के अधीन सरल लोलक की गति का वर्णन करने वाला अवकल समीकरण लिखिए। दोनों ही स्थितियों में आवर्त-काल का व्यंजक दीजिए। रैखिक स्थिति में आवर्त-काल व्युत्पन्न कीजिए। मान लीजिए लोलक की लंबाई दुगुनी कर दी गई है, तब दोनों स्थितियों में लोलक कार आवर्त-काल ज्ञात कीजिए। 5

(b) मान लीजिए दिल्ली में एक का की तिमाही बिक्री क्रमशः 2682, 2462 और 3012 है। पिछले आँकड़ो (इन तीन आंकड़ों बिंदुओं से पहले) से एक सरल रेखा आसंजित की गई थी। रेखा पर अंतिम प्रेक्षित समय का संगत मान 2988 है और प्रवणता 80 है। $\alpha = \beta = 0.2$ मानकर ऊपर दिए गए तीन प्रेक्षणों के बाद की तिमाही अवधि में होने वाली बिक्री का पूर्वानुमान लगाने के लिए ऊपर दिए गए तीन प्रेक्षणों पर आधारित चरघातांकी मसृणीकरण का प्रयोग कीजिए। 5