MTE-09

00382

BACHELOR'S DEGREE PROGRAMME (BDP)

Term-End Examination

December, 2013

ELECTIVE COURSE : MATHEMATICS

MTE-09 : REAL ANALYSIS

Time : 2 hours | *Maximum Marks : 50*

Weightage : 70%

Note : *Attempt* ***five*** *questions in all. Question. No.* ***1*** *is* ***compulsory****. Do* ***any four*** *questions out of the Questions. No. 2 to 7.*

---

1. Are the following statements **True** or **False**. Give reasons for your answers **10**

(a) The function $f(x) = 2x - [x+2]$, $x \in \mathbf{R}$, is a periodic function.

(b) The sequence $\{S_n\}$ where $S_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \ldots + \frac{1}{n}$ is convergent.

(c) If f and g are two functions such that $f+g$ is integrable, then f as well g is integrable.

(d) If $f : [0, 1] \to \mathbf{R}$ is a function, continuous on $[0, 1]$ and differentiable in $(0, 1)$, such that $f(0) = 0, f\left(\frac{3}{4}\right) = f(1) = 1$, then $f'(c) = \frac{4}{3}$, for some $c \in (0, 1)$.

(e) For any $x \in \mathbf{R}$, $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{x^2 + nx}{n} = x^2$.

2. (a) Prove that a lower bound l of a non empty set $S \subset \mathbf{R}$ is the infimum of S if and only if for every $\varepsilon > 0$ there exists an $s_\varepsilon \in S$ such that $s_\varepsilon < l + \epsilon$. 4

(b) Suppose (f_n) and (g_n) are uniformly convergent sequences of functions. Give an example to show that $(f_n\, g_n)$ may not converge uniformly. 3

(c) Find the $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1-\cos x^3}{x^3 \sin x^3}$ 3

3. (a) Write the inequality $5 \le 3x + 2 \le 7$ in the modulus form. 2

(b) Show that the Langrange's form of remainder $R_n(x)$ in the Maclaurin's series expansion of e^{3x} tends to zero as $n \to \infty$. Hence obtain the Maclaurin's infinite expansion for e^{3x}. 4

(c) Show that $L(P_1, f) \le L(P_2, f)$, where 4

$f(x) = 4x$, $P_1 = \left\{0, \frac{1}{2}, 1\right\}$ and

$P_2 = \left\{0, \frac{1}{3}, \frac{3}{4}, 1\right\}$

4. (a) Show that 4

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(\alpha+n)(\alpha+n+1)} = \frac{1}{\alpha}, \text{ for } \alpha > 0$$

(b) Prove that $(1+x)^n \ge 1 + nx$, for all $n \in \mathbf{N}$, where $x > -1$. 3

(c) Let (a_n) be a sequence, $a_n \ne 1$, such that $a_n \to 1$. Show that $3^{a_n} \to 3$. 3

5. (a) Prove that for a sequence (x_n), with nonzero limit x, $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{x_n} = \frac{1}{x}$. Hence deduce that, for $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ and $\lim_{n\to\infty} y_n = y \ (y \neq 0)$, $\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = \frac{x}{y}$. 4

(b) Prove that for $x > 0$, $\sqrt{1+x} < 1+\frac{x}{2}$. 4

(c) Explain why the following sets are not open : 2

(i) The set of rational numbers **Q**.

(ii) The set $\left\{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbf{N}\right\}$.

6. (a) Find $\lim_{n\to\infty} \sum_{r=1}^{3n} \frac{n^2}{(5n+r)^3}$. 4

(b) State Fundamental theorem of calculus. Use the theorem to evaluate $\int_{-1}^{3} f(x)dx$, where 4

$$f(x) = \begin{cases} -1 & , \quad -1 \leq x \leq 0 \\ 1 & , \quad 0 < x \leq 3 \end{cases}$$

(c) Is every continuous function defined on **R** uniformly continuous ? Justify. 2

7. (a) Prove that continuous function of a continuous function is continuous. **3**

(b) State Intermediate Value Theorem. Show that the function defined on [0, 1] as **3**

$$f(x) = \begin{cases} 2x + 1 & \forall x \in]0, 1] \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$ does not

satisfy the conclusion of the Intermediate Value Theorem.

(c) Determine the local minimum and local maximum values of the function f defined by $f(x) = x^5 - 5x^4 + 5x^3 - 1$. **4**

स्नातक उपाधि कार्यक्रम (बी.डी.पी.)

सत्रांत परीक्षा

दिसम्बर, 2013

ऐच्छिक पाठ्यक्रम : गणित

एम.टी.ई.-09 : वास्तविक विश्लेषण

समय : 2 घण्टे — *अधिकतम अंक : 50*

कुल का : 70%

नोट : *__कुल पाँच__ प्रश्न कीजिए। प्रश्न संख्या 1 __अनिवार्य__ है। प्रश्न संख्या 2 से 7 में से __किन्हीं चार__ प्रश्नों के उत्तर दीजिए।*

---

1. बताइए निम्नलिखित कथन **सत्य** हैं या **असत्य**। अपने उत्तरों के कारण बताइए। 10

(a) फलन $f(x) = 2x - [x+2]$, $x \in \mathbf{R}$ एक आवधिक फलन है।

(b) अनुक्रम $\{S_n\}$ जहाँ $S_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \dots + \frac{1}{n}$ अभिसारी है।

(c) यदि f और g दो ऐसे फलन हैं जिनके लिए $f + g$ समाकलनीय है, तब f और g दोनों समाकलनीय हैं।

(d) यदि $f : [0, 1] \to \mathbf{R}$, $[0, 1]$ पर संतत और $(0, 1)$ में अवकलनीय एक ऐसा फलन है जिसके लिए $f(0) = 0, f\left(\frac{3}{4}\right) = f(1) = 1$, तब किसी $c \in (0, 1)$ के लिए $f'(c) = \frac{4}{3}$, है।

(e) किसी $x \in \mathbf{R}$ के लिए, $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{x^2 + nx}{n} = x^2$.

2. (a) सिद्ध कीजिए कि अरिक्त समुच्चय $S \subset \mathbf{R}$ का निम्न परिबंध l समुच्चय S का निम्नक होगा ε यदि और केवल यदि प्रत्येक $\varepsilon > 0$ के लिए एक ऐसे $s_\varepsilon \in S$ का अस्तित्व होता है जिसके लिए $s_\varepsilon < l + \epsilon$. **4**

(b) मान लीजिए (f_n) और (g_n) फलनों के एकसमानत: अभिसारी अनुक्रम हैं। $(f_n\, g_n)$ एकसमानत: अभिसारी न हो, इसके दर्शाने के एक उदाहरण दीजिए। **3**

(c) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 - \cos x^3}{x^3 \sin x^3}$ ज्ञात कीजिए। **3**

3. (a) मापांक रूप में असमिका $5 \le 3x + 2 \le 7$ को बदलिए। **2**

(b) दिखाइए कि e^{3x} के मैक्लेरियन श्रेणी प्रसार में $R_n(x)$ अवशेष का लंग्राज रूप शून्य की और प्रवृत्त होती है जबकि $n \to \infty$. इस तरह e^{3x} के लिए मैकलेरियन अनंत प्रसार प्राप्त कीजिए। **4**

(c) दिखाइए कि $L\,(P_1, f) \le L\,(P_2, f)$, जहाँ **4**

$f(x) = 4x$, $\quad P_1 = \left\{0, \dfrac{1}{2}, 1\right\}$ $\quad$ और

$P_2 = \left\{0, \dfrac{1}{3}, \dfrac{3}{4}, 1\right\}$.

4. (a) दिखाइए कि $\alpha > 0$ के लिए **4**

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(\alpha + n)(\alpha + n + 1)} = \frac{1}{\alpha},$$

(b) सिद्ध कीजिए कि सभी $n \in \mathbf{N}$ के लिए $(1+x)^n \geq 1+nx$, जहाँ $x > -1$. 3

(c) मान लीजिए (a_n) एक ऐसा अनुक्रम $a_n \neq 1$ है जिसके लिए $a_n \to 1$. दिखाइए कि $3^{a_n} \to 3$. 3

5. (a) दिखाइए कि शून्येतर सीमा x वाले अनुक्रम (x_n) के लिए $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{x_n} = \frac{1}{x}$. इस तरह निष्कर्ष निकालिए कि $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$ और $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = y\ (y \neq 0)$ के लिए $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = \frac{x}{y}$. 4

(b) सिद्ध कीजिए कि $x > 0$ के लिए $\sqrt{1+x} < 1+\frac{x}{2}$. 4

(c) बताइए कि निम्नलिखित समुच्चय विवृत्त क्यों नहीं है : 2

(i) परिमेय संख्याओं $\mathbf{Q}$ का समुच्चय

(ii) समुच्चय $\left\{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbf{N}\right\}$.

6. (a) $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{r=1}^{3n} \frac{n^2}{(5n+r)^3}$ ज्ञात कीजिए। 4

(b) कलन के मूल प्रमेय कथन दीजिए। इस प्रमेय से $\int_{-1}^{3} f(x)\,dx$ का मूल्यांकन कीजिए जहाँ 4

$$f(x) = \begin{cases} -1 & , \ -1 \leq x \leq 0 \\ 1 & , \ 0 < x \leq 3 \end{cases}$$

(c) क्या $\mathbf{R}$ पर परिभाषित प्रत्येक फलन एकसमानत: अभिसारी होता है? पुष्टि कीजिए। 2

7\. (a) सिद्ध कीजिए कि संतत फलन का संतत फलन संतत होता है। 3

(b) मध्यवर्ती मान प्रमेय का कथन दीजिए। दिखाइए कि 3

$[0, 1]$ पर $f(x) = \begin{cases} 2x+1 & \forall x \in]0,1] \\ 0 & x=0 \end{cases}$ के रूप में

परिभाषित फलन मध्यवर्ती मान प्रमेय के निष्कर्ष को संतुष्ट नहीं करता।

(c) $f(x) = x^5 - 5x^4 + 5x^3 - 1$ द्वारा परिभाषित फलन f के स्थानीय निम्निष्ठ और स्थनीय उच्चिष्ठ मान ज्ञात कीजिए। 4