03022

BACHELOR'S DEGREE PROGRAMME

Term-End Examination

December, 2013

ELECTIVE COURSE : MATHEMATICS

MTE-08 : DIFFERENTIAL EQUATIONS

Time : 2 hours *Maximum Marks : 50*

(Weightage 70%)

Note : *Q. No. 1 is* ***compulsory.*** *Attempt* ***any four*** *questions out of the remaining questions No.s* **2-7.** *Calculators are* ***not*** *allowed.*

---

1. State whether the following statements are **true or false**. Justify your answer either, with the help of a short proof, or by a counter example. **5x2=10**

(a) The two-parameter family of solutions of the differential equation.

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 5\frac{dy}{dx} + 6y = 6x - 5$$

is $Ae^{2x} + Be^{3x} + x$ (A, B : Parameters).

(b) The differential equation $(8ydx + 8xdy) + x^2y^3(4ydx + 5xdy) = 0$ is exact.

(c) The differential equation

$$\frac{dy}{dx} + 2xy + xy^4 = 0$$

is reducible to a linear differential equation.

(d) The Pfaffian differential equation $a^2y^2z^2dx + b^2z^2x^2dy + c^2x^2y^2dz = 0$ is integrable.

(e) The partial differential equation

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{1}{k}\frac{\partial z}{\partial t}$$

Possesses solutions of the form

$$\sum_{n=0}^{\infty} C_n \cos(nx + \varepsilon_n) e^{-kn^2 t},$$

where the C_n's and the ε_n's are parameters, $(n = 0, 1, 2, ...)$

2. (a) Solve the differential equation. 3
$(6xy - 3y^2 + 2y)dx + 2(x - y)dy = 0.$

(b) Solve the following partial differential equation using the method of separation of variables. 3

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = (x + y)u.$$

(c) Find the integral surface of the partial differential equation 4
$x^2p + y^2q + z^2 = 0,$
which passes through the hyperbola
$xy = x + y,\ z = 1.$

3. (a) Show that the Pfaffian differential equation 3
$(1 + yz)dx + x(z - x)dy - (1 + xy)dz = 0$ is integrable and find its integral.

(b) By changing the independent variable suitably, solve 4

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + \left(4x - \frac{1}{x}\right)\frac{dy}{\partial x} + 4x^2 y = 3xe^{-x^2}.$$

(c) Solve : $\frac{dy}{dx} + xy = e^{x^2/2} (\sin x)\, y$ 3

4. (a) The surface temperature of a dead body changes at a rate proportional to the difference between the temperature of a body and that of surrounding environment. The temperature of a dead body is 85°F when discovered and 74°F two hours later. If the surrounding temperature is 68°F. Find the time when the body was discovered after death. (take temperature of the body at the time of death as 98.6°F). 5

(b) Find the most general form of the differential equation 5

$M(x, y)\, dx + (2x^2y^3 + x^4y)dy = 0$ which is exact and solve it.

5. (a) Given that $\sin x$ is a solution of the differential equation 5

$$L[y] \equiv \frac{d^4y}{dx^4} + 2\frac{d^3y}{dx^3} + 6\frac{d^2y}{dx^2} + 2\frac{dy}{dx} + 5y = 0,$$

find the 4 - parameter family of solutions of it. Hence solve

$L[y] = x^2$

(b) Find the solution of the differential equation 5

$$\left(D \equiv \frac{\partial}{\partial x}, D' \equiv \frac{\partial}{\partial y} \right)$$

$(D^2 - D')\, z = 3 \cos (x + 2y)$

6. (a) Solve the Laplace equation 7

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$$

in the rectangle with $u(0, y)=0$, $u(a, y)=0$, $u(x, b)=0$ and $u(x, 0)=f(x)$.

(b) Solve the equation 3

$6y^2dx - x(2x^3+y)dy=0$.

7. (a) Using the method of variation of parameters solve 4

$$\frac{d^2y}{dx^2}+y=\cot x,\quad 0<x<\pi/2.$$

(b) Solve the partial differential equation $p^2=zq$. 4

(c) Using the method of undetermined coefficient write the form of particular integral of the equation $y^{111}-6y^1=2x+5e^{-2x}+6\cos x$. 2

स्नातक उपाधि कार्यक्रम

सत्रांत परीक्षा

दिसम्बर, 2013

ऐच्छिक पाठ्यक्रम : गणित

एम.टी.ई.-08 : अवकल समीकरण

समय : 2 घण्टे *अधिकतम अंक : 50*

(कुल का : 70%)

नोट : *प्रश्न सं. 1 **अनिवार्य** है। शेष प्रश्न 2 से 7 में से **किन्हीं चार** प्रश्नों के उत्तर दीजिए। कैलकुलेटर का प्रयोग करने की अनुमति **नहीं** है।*

---

1. बताइए कि निम्नलिखित कथन सत्य है या असत्य, उपपति या प्रति-उदाहरण की सहायता से अपने उत्तर की पुष्टि कीजिए। **5x2=10**

   (a) अवकल समीकरण

   $$\frac{d^2y}{dx^2} - 5\frac{dy}{dx} + 6y = 6x - 5$$

   का दो प्राचल हल कुल निम्नलिखित है।

   $Ae^{2x} + Be^{3x} + x$ (A, B प्राचल हैं)।

   (b) अवकल समीकरण

   $(8ydx + 8xdy) + x^2y^3(4ydx + 5xdy) = 0$

   यथातथ है।

   (c) अवकल समीकरण

   $$\frac{dy}{dx} + 2xy + xy^4 = 0$$

   को एक रैखिक अवकल समीकरण में समानीत किया जा सकता है।

(d) फैफियन अवकल समीकरण
$a^2y^2z^2\,dx + b^2z^2x^2\,dy + c^2x^2y^2\,dz = 0$
समाकलनीय है।

(e) आंशिक अवकल समीकरण

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{1}{k}\frac{\partial z}{\partial t}$$

के निम्न रुप के हल होते हैं :

$$\sum_{n=0}^{\infty} C_n \cos(nx + \varepsilon_n) e^{-kn^2 t},$$

जहाँ C_n और ε_n, $n = 0, 1, 2, \ldots\ldots$ प्राचल हैं।

2. (a) अवकल समीकरण को हल कीजिए : 3
$(6xy - 3y^2 + 2y)dx + 2(x - y)dy = 0.$

(b) चर - पृथक्करण विधि द्वारा निम्नलिखित आंशिक अवकल समीकरण को हल कीजिए : 3

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = (x + y)u.$$

(c) आंशिक अवकल समीकरण 4
$x^2p + y^2q + z^2 = 0$
का समाकल पृष्ठ मालूम कीजिए जो अतिपरवलय
$xy = x + y,\ z = 1.$
से होकर जाता है।

3. (a) दिखाइए कि फैफियन अवकल समीकरण 3
$(1 + yz)\,dx + x(z - x)\,dy - (1 + xy)\,dz = 0$
समाकलनीय है और इस तरह इसका समाकल ज्ञात कीजिए।

(b) स्वतंत्र चर में उपयुक्त परिवर्तन करके समीकरण 4

$$\frac{d^2y}{dx^2}+\left(4x-\frac{1}{x}\right)\frac{dy}{\partial x}+4x^2y=3xe^{-x^2}$$ का हल प्राप्त कीजिए।

(c) हल कीजिए : $\frac{dy}{dx}+xy=e^{x^2/2}\ (\sin x)\ y.$ 3

4. (a) एक मृतक शरीर की पृष्ठीय तापमान परिवर्तन दर शरीर के तापमान और आसपास के वातावरण के तापमान के अंतर के समानुपाती है। प्राप्त होने पर मृतक शरीर का तापमान 85°F और दो घंटे बाद 74°F था। यदि वातावरण का तापमान 68°F हो, तो मृत्यु के कितने समय बाद शरीर प्राप्त हुआ, वह समय ज्ञात कीजिए। (मृत्यु के समय शरीर का तापमान 98.6°F था) 5

(b) अवकल समीकरण 5

$M(x, y)\ dx+(2x^2y^3+x^4y)dy=0$ का व्यापक रुप ज्ञात कीजिए जो यथातथ हो और उसका हल प्राप्त कीजिए।

5. (a) यदि अवकल समीकरण 5

$$L[y]\equiv\frac{d^4y}{dx^4}+2\frac{d^3y}{dx^3}+6\frac{d^2y}{dx^2}+2\frac{dy}{dx}+5y=0,$$

का एक हल $\sin x$ हो तो इसका 4 - प्राचल हल कुल ज्ञात कीजिए। अत: समीकरण

$L[y]=x^2$

का हल प्राप्त कीजिए।

(b) अवकल समीकरण 5

$(D^2 - D')\ z = 3\ \cos\ (x + 2y)$

$\left(D \equiv \frac{\partial}{\partial x}, D' \equiv \frac{\partial}{\partial y} \right)$ का हल प्राप्त कीजिए।

6. (a) $u(0,\ y) = 0,\ u(a,\ y) = 0,\ u(x,\ b) = 0$ और $u(x, 0) = f(x)$ वाले आयत में लालास समीकरण 7

$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ को हल कीजिए।

(b) समीकरण $6y^2 dx - x(2x^3 + y)dy = 0$ को हल कीजिए। 3

7. (a) प्राचल विचरण विधि से समीकरण 4

$\frac{d^2 y}{dx^2} + y = \cot x,\ 0 < x < \pi/2$ का हल प्रप्त कीजिए।

(b) आंशिक अवकल समीकरण $p^2 = zq$ का हल प्राप्त कीजिए। 4

(c) अनिर्धारित गुणांक विधि से समीकरण $y^{111} - 6y^1 = 2x + 5e^{-2x} + 6\cos x$ के विशिष्ट समाकल का रुप लिखिए। 2