No. of Printed Pages : 8

MTE-07

BACHELOR'S DEGREE PROGRAMME (BDP)

Term-End Examination

December, 2013

01672

ELECTIVE COURSE : MATHEMATICS

MTE-07 : ADVANCED CALCULUS

Time : 2 hours *Maximum Marks : 50*

Weightage 70%

Note : Question. ***no. 1*** *is* ***compulsory.*** *Attempt* ***any four*** *questions from the remaining. No Calculators are* ***allowed.***

1. State whether the following statements are **true or false**. Give reasons for your answers. **2x5=10**

(a) $\lim_{x \to \infty} \sin x$ does not exist.

(b) If $z = \dfrac{x^{\frac{1}{5}} + y^{\frac{1}{5}}}{x^{\frac{1}{4}} + y^{\frac{1}{4}}}$, then $x\dfrac{\partial z}{\partial x} + y\dfrac{\partial z}{\partial y} = \dfrac{1}{20}z$.

(c) The function $f(x, y) = x^2 - 2xy + y^2 + 7$ has global maximum at the point (1, 1).

(d) Functions $f(x, y) = \dfrac{2y}{3x}$ and $g(x, y) = \dfrac{3x - 2y}{3x + 2y}$ are functionally dependent.

(e) The function f, defined by $f(x, y, z) = xyz$ is integrable over $[0,1] \times [1,2] \times [2,3]$.

2. (a) Examine whether the limit of the following function exists or not as $x \to 0$. 2

$$f(x) = \begin{cases} 3x+2 & x > 0 \\ \dfrac{1}{x} & x < 0 \end{cases}$$

(b) Find the direction derivative of the function, $f(x, y) = x^3 - 3xy + 4y^2$ at (1, 2), in the direction $\theta = \dfrac{\pi}{6}$. 3

(c) Suppose W is the region bounded by $x = 0$, $y = 0$, $z = 9$ and the surface $z = x^2 + y^2$. Compute the integral $\iiint_W 5y \, dx \, dy \, dz$. 5

3. (a) Compute the volume within the cylinder $x^2 + y^2 = 1$ between the planes $y + z = 5$ and $z = 0$. 4

(b) Examine $f(x, y) = x^2 - 6xy + 8y^2 - 7x + 7y + 14$ for extreme values. 4

(c) Can we apply to L's Hospital's rule to evaluate the limit, $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{5x \cos x}{3 + 2x^2}$? Justify. 2

4. (a) Find lub S and glb S, where 2

$$S = \left\{ x + \frac{1}{x} / 1 < x \leq 2 \right\}.$$

(b) Use Green's theorem to evaluate the area enclosed by the ellipse $\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{9} = 9$. 4

(c) Show that the function defined as 4

$$f(x, y)=\begin{cases}\dfrac{2x^3+5y^3}{x^2+y^2} & (x, y)\neq(0, 0)\\ 0 & (x, y)=(0, 0)\end{cases}$$

is continuous at the point (0, 0).

5. (a) Let S be an open disc with centre (0, 0, 0) and radius 7 in $\mathbf{R}^3$. Show that $x \in S$, where $x=3e_1+e_2-3e_3$, $e_1=(1, 0, 0)$ $e_2=(0, 1, 0)$ and $e_3=(0, 0, 1)$. 3

(b) Let $f(x, y)=x^7-3x^2y$, $x=2st$; $y=s^2-t^2$. 3

Find $\dfrac{\partial f}{\partial s}$ and $\dfrac{\partial f}{\partial t}$.

(c) Find $\dfrac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)}$, where $u=x+y-z$; 4

$v=x-y+z$; $w=y+2x$.

6. (a) Find f_{xy} (0, 0) and f_{yx} (0, 0), where 4

$$f(x,y)=\begin{cases}2xy & |y|\leq|x|\\ -\dfrac{1}{2}xy & |y|>|x|\end{cases}$$

Check whether they are equal or not.

(b) Find the Taylor polynomials of $f(x, y)=2+3x^2+5y^2$ at (0, 1). 4

(c) Examine the level curves of $9x^2+16y^2+4z^2=1$. 2

7. (a) Let $f(x)=\frac{\pi x^3-5x+7}{2x^3+7x-9}$ and $g(x)=\sin x$ be two real valued functions of a real variable defined on $]2, \infty[$ such that h is their composite function gof. Evaluate $\lim_{x \to \infty} h(x)$. **3**

(b) Prove that the rectangle of perimeter 4 with largest area is a unit square. **3**

(c) Obtain the double integral of the function, $f(x, y)=2xy+5e^x$ over the region bounded by the triangle formed by the y - axis and the lines $5y=x$ and $y=z$. **4**

स्नातक उपाधि कार्यक्रम (बी.डी.पी.)

सत्रांत परीक्षा

दिसम्बर, 2013

ऐच्छिक पाठ्यक्रम : गणित

एम.टी.ई.-07 : उच्च फलन

समय : 2 घण्टे *अधिकतम अंक : 50*

कुल का 70%

नोट : *प्रश्न. स. 1* ***अनिवार्य*** *है। शेष प्रश्नों में से* ***किन्हीं चार*** *के उत्तर दीजिए। कैलकुलैटरों का प्रयोग करने की अनुमति* ***नहीं*** *है।*

1. बताइए कि निम्नलिखित कथन **सत्य** हैं या **असत्य**। अपने उत्तरों के कारण बताइए। **2×5=10**

(a) $\lim_{x \to \infty} \sin x$ का अस्तित्व नहीं होता।

(b) यदि $z = \dfrac{x^{\frac{1}{5}} + y^{\frac{1}{5}}}{x^{\frac{1}{4}} + y^{\frac{1}{4}}}$, तब $x\dfrac{\partial z}{\partial x} + y\dfrac{\partial z}{\partial y} = \dfrac{1}{20}z$.

(c) फलन $f(x, y) = x^2 - 2xy + y^2 + 7$ का बिंदु (1, 1). पर सार्वत्रिक उच्चिष्ट होता है।

(d) फलन $f(x, y) = \dfrac{2y}{3x}$ और $g(x, y) = \dfrac{3x - 2y}{3x + 2y}$ फलनिकत आश्रित हैं।

(e) $f(x, y, z) = xyz$ द्वारा परिभाषित फलन f, $[0,1] \times [1,2] \times [2,3]$ पर समाकलनीय होता है।

2. (a) ज्ञात कीजिए कि निम्नलिखित फलन की सीमा का $x \to 0$ के होने पर अस्तित्व है या नही. 2

$$f(x) = \begin{cases} 3x+2 & x > 0 \\ \dfrac{1}{x} & x < 0 \end{cases}$$

(b) दिक् $\theta = \dfrac{\pi}{6}$ में (1, 2) पर फलन 3

$f(x, y) = x^3 - 3xy + 4y^2$ का दिक् अवकलन ज्ञात कीजिए।

(c) मान लीजिए W, $x=0$, $y=0$, $z=9$ और-पृष्ठ $z = x^2 + y^2$ द्वारा परिबद्ध प्रदेश है। समाकल 5

$\iiint_W 5y \, dx \, dy \, dz$ परिकलित कीजिए।

3. (a) समतलों $y + z = 5$ और $z = 0$ के बीच बेलन $x^2 + y^2 = 1$ के अंदर प्रदेश का आयतन परिकलित कीजिए। 4

(b) चरम मानों के लिए $f(x,y) = x^2 - 6xy + 8y^2 - 7x + 7y + 14$ की जाँच कीजिए। 4

(c) सीमा $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{5x \cos x}{3 + 2x^2}$ का मूल्यांकन करने के लिए L's हस्पिताल नियम को क्या हम लागु कर सकते हैं। पुष्टि कीजिए। 2

4. (a) lub S और glb S ज्ञात कीजिए, जहाँ 2

$$S = \left\{ x + \frac{1}{x} / \, 1 < x \leq 2 \right\}.$$

(b) ग्रीन प्रमेय से दीर्घवृत्त $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=9$ द्वारा परिबद्ध प्रदेश का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए। 4

(c) दिखाइए कि 4

$$f(x, y)=\begin{cases}\dfrac{2x^3+5y^3}{x^2+y^2} & (x, y)\neq(0,0)\\ 0 & (x, y)=(0,0)\end{cases}$$

द्वारा परिभाषित फलन बिन्दु (0, 0) पर संतत है।

5. (a) मान लीजिए S एक विवृत डिस्क है जिसका $\mathbf{R}^3$ में केन्द्र (0, 0, 0) और त्रिज्या 7 है। दिखाइए कि $x \in S$. जहाँ $x=3e_1+e_2-3e_3$, $e_1=(1, 0, 0)$ $e_2=(0, 1, 0)$ और $e_3=(0, 0, 1)$. 3

(b) मान लीजिए $f(x, y)=x^7-3x^2y$, जहाँ $x=2st$; $y=s^2-t^2$. तब $\frac{\partial f}{\partial s}$ और $\frac{\partial f}{\partial t}$ ज्ञात कीजिए। 3

(c) $\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)}$ ज्ञात कीजिए, जहाँ $u=x+y-z$; $v=x-y+z$; $w=y+2x$. 4

6. (a) $f_{xy}(0, 0)$ और $f_{yx}(0, 0)$ ज्ञात कीजिए, जहाँ 4

$$f(x,y)=\begin{cases}2xy & |y|\leq|x|\\ -\frac{1}{2}xy & |y|>|x|\end{cases}$$

जाँच कीजिए दोनों बराबर है या नहीं।

(b) $(0, 1)$ पर $f(x, y) = 2 + 3x^2 + 5y^2$ का टेलर - बहुपद ज्ञात कीजिए। 4

(c) $9x^2 + 16y^2 + 4z^2 = 1$ के स्तर वक्रों की जाँच कीजिए। 2

7. (a) मान लीजिए $f(x) = \frac{\pi x^3 - 5x + 7}{2x^3 + 7x - 9}$ और $g(x) = \sin x$ $]2, \infty[$ पर परिभाषित वास्तविक चर के दो एसे वास्तविक मान फलन है जिनके h से निरूपित करता है संयुक्त फलन gof. तब $\lim_{x \to \infty} h(x)$ का मूल्यांकन कीजिए। 3

(b) सिद्ध कीजिए कि सबसे बड़े क्षेत्रफल वाले परिमाप 4 की आयत, एकक वर्ग है। 3

(c) y - अक्ष और $5y = x$ और $y = z$ रेखाओं से बने त्रिकोण द्वारा परिबद्ध प्रदेश पर फलन $f(x, y) = 2xy + 5e^x$ का द्विक समाकल प्राप्त कीजिए। 4