

BACHELOR'S DEGREE PROGRAMME (BDP)

Term-End Examination

December, 2013

ELECTIVE COURSE : MATHEMATICS

MTE-06 : ABSTRACT ALGEBRA

Time : 2 hours

Maximum Marks : 50

Weightage : 70%

Note : Attempt five questions in all. Question No. 7 is compulsory. Answer any four questions from the rest. Calculators are not allowed.

1. (a) Prove by the method of induction that 3

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

for $n \geq 1$.

- (b) Suppose ϕ is a homomorphism from \mathbf{Z}_{30} to \mathbf{Z}_{30} and $\text{Ker } \phi = \{0, 10, 20\}$. If $\phi(23) = 9$, determine all the elements that image 9 under ϕ . 3

- (c) Let $G = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \right\}$. 4

Write down the table of operation where the operation is matrix multiplication. Is G a group? Is G cyclic? Justify your answer.

2. (a) Find the orders of the elements $\bar{7}$ and $\bar{9}$ in \mathbf{Z}_{12} . 2
- (b) Find the signatures of $(1\ 2\ 4)$ and $(1\ 3\ 2\ 4)$ in S_4 , using the definition of signature. 2
- (c) Prove that $\mathbf{Q} + \sqrt{3}\mathbf{Q} = \{a + \sqrt{3}b \mid a, b \in \mathbf{Q}\}$ is a field. 6
3. (a) Let $R = \{a + b\sqrt{5} \mid a, b \in \mathbf{Z}\}$ and $d : R \rightarrow \mathbf{Z}$ be a function defined by $d(a + b\sqrt{5}) = a^2 - 5b^2$. 5
- (i) Check whether d is a ring homomorphism. If it is, find its kernel.
- (ii) Show that, if $\alpha \in R$ is a unit, $d(\alpha) = \pm 1$.
- (b) Check whether $\{(1, 1), (2, 2), (1, 2), (2, 3), (3, 3), (2, 1), (3, 2)\}$ is an equivalence relation on $\{1, 2, 3\}$ or not. Give reasons for your answer. 2
- (c) Let \mathbf{Q} be the field of rational numbers. Define $a \oplus b = a + b$, $a \odot b = 2ab$. Check whether $(\mathbf{Q}, \oplus, \odot)$ is a commutative ring with identity. 3
4. (a) Let G be a group of order 8. Show that G has an element of order 2. 3
- (b) Let $R = \frac{\mathbf{Z}[x]}{((1+x)^3)}$. Exhibit a zero divisor in R . Check whether x is a unit in R . 4

(c) Let $R = \{(a, b) \mid a, b \in \mathbf{Z}\}$ be a ring with respect to component wise addition and multiplication as the operations. Check if $I = \{(a, b) \in R \mid 2a + 3b = 0\}$ is an ideal of R . 3

5. (a) Show that every group of order 30 has a proper and non-trivial normal subgroup. 5

(b) Let $R = \left\{ \begin{pmatrix} r_1 & 0 \\ 0 & r_2 \end{pmatrix} \mid r_1, r_2 \in \mathbf{R}, r_1, r_2 \neq 0 \right\}$ be 3

the ring of 2×2 diagonal matrices with real entries. Show that the map $f: \mathbf{Z} \rightarrow R$, defined by $f(n) = nI$, where I is the 2×2 identity matrix, is a homomorphism of rings. Hence prove that $\mathbf{Z} \cong \{nI \mid n \in \mathbf{Z}\}$.

(c) If N is a normal subgroup of a group G such that $\frac{G}{N}$ is abelian, then show that $[G, G] \subseteq N$. 2

6. (a) How many non isomorphic groups of order 34 are there? Justify your answer. 2

(b) Is the subring of a PID a PID? Justify your answer. 6

(c) Show that $\{\bar{0}, \bar{3}\}$ is a maximal ideal in \mathbf{Z}_6 . 2

7. Which of the following statements are **true** ? Give reasons for your answer. **10**
- (a) If G is a cyclic group of order 6, then G has 3 distinct generators.
 - (b) If a ring has zero divisors, it also has nilpotent elements.
 - (c) Union of two subgroups of a group G is again a subgroup of G .
 - (d) In a field every non-zero element is a zero divisor.
 - (e) The group Z_{15} is cyclic.
-

स्नातक उपाधि कार्यक्रम (बी.डी.पी.)

सत्रांत परीक्षा
दिसम्बर, 2013

ऐच्छिक पाठ्यक्रम : गणित

एम.टी.ई.- 06 : अमूर्त बीजगणित

समय : 2 घण्टे

अधिकतम अंक : 50

कुलांक : 70%

नोट : कुल पाँच प्रश्नों के उत्तर दीजिए। प्रश्न सं. 7 अनिवार्य है। शेष में से किन्हीं चार प्रश्नों के उत्तर दीजिए। कैलकुलेटरों का प्रयोग करने की अनुमति नहीं है।

1. (a) आगमन विधि से सिद्ध कीजिए कि $n \geq 1$ के लिए 3

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

(b) मान लीजिए $\phi: \mathbf{Z}_{30}$ से \mathbf{Z}_{30} तक एक समाकारिता है और 3
 $\text{Ker } \phi = \{0, 10, 20\}$ यदि $\phi(23) = 9$, तब \mathbf{Z}_{30} के
ऐसे सभी अवयव निर्धारित कीजिए जिन के लिए ϕ के
अधीन प्रतिबिंब 9 है।

(c) मान लीजिए 4

$$G = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \right\}. \text{ संक्रिया}$$

सारणी लिखिए, जहाँ संक्रिया अव्यूह गुणन है। क्या G
एक समूह है? क्या G चक्रीय हैं? अपने उत्तर की
पृष्टि कीजिए।

2. (a) Z_{12} में अवयव $\bar{7}$ और $\bar{9}$ की कोटियाँ ज्ञात कीजिए। 2
- (b) चिह्नक परिभाषा का प्रयोग करते हुए S_4 में $(1\ 2\ 4)$ 2
और $(1\ 3\ 2\ 4)$ के चिह्नक ज्ञात कीजिए।
- (c) सिद्ध कीजिए कि : 6
- $$\mathbb{Q} + \sqrt{3}\mathbb{Q} = \{a + \sqrt{3}b \mid a, b \in \mathbb{Q}\} \text{ एक क्षेत्र है।}$$
3. (a) मान लीजिए $R = \{a + b\sqrt{5} \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$ और 5
 $d: R \rightarrow \mathbb{Z}, d(a + b\sqrt{5}) = a^2 - 5b^2$ द्वारा परिभाषित
एक फलन है।
- (i) जाँच कीजिए d एक वलय समाकारिता है या 2
नहीं। यदि है तो इसकी अष्टि ज्ञात कीजिए।
- (ii) दिखाइए कि यदि $\alpha \in R$ एक मात्रक है, तब
 $d(\alpha) = \pm 1$.
- (b) जाँच कीजिए कि $\{(1, 1), (2, 2), (1, 2), (2, 3),$ 2
 $(3, 3), (2, 1), (3, 2)\}, \{1, 2, 3\}$ पर तुल्यता संबंध है
या नहीं। अपने उत्तर के कारण बताइए।
- (c) मान लीजिए \mathbb{Q} परिमेय संख्याओं का क्षेत्र है। 3
 $a \oplus b = a + b, a \odot b = 2ab$ परिभाषित कीजिए। जाँच
कीजिए कि $(\mathbb{Q}, \oplus, \odot)$ तत्समकी क्रमविनिमेय वलय
है या नहीं।

4. (a) मान लीजिए G , कोटि 8 का एक समूह है। दिखाए कि G में कोटि 2 का अवयव होता है। 3

(b) मान लीजिए $R = \frac{\mathbb{Z}[x]}{((1+x)^3)}$. R में शून्य विभाजक 4

दिखाइए। जाँच कीजिए कि $x - R$ में एक मात्रक है या नहीं।

(c) मान लीजिए $R = \{(a, b) \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$ संगत घटकों की जमा और गुणा वाल संक्रियाओं के सापेक्ष एक वलय है। जाँच क्या $I = \{(a, b) \in R \mid 2a + 3b = 0\}$, R की एक गुणजावली है। 3

5. (a) दिखाइए कि कोटि 30 के प्रत्येक समूह में एक अचित और अतुच्छ प्रसामान्य उपसमूह होता है। 5

(b) मान लीजिए 3

$$R = \left\{ \begin{pmatrix} r_1 & 0 \\ 0 & r_2 \end{pmatrix} \mid r_1, r_2 \in \mathbb{R}, r_1, r_2 \neq 0 \right\}, \quad 2 \times 2$$

विकर्ण आव्यूहों का वलय है। दिखाइए कि $f(n) = nI$, द्वारा परिभाषित फलन $f: \mathbb{Z} \rightarrow R$, जहाँ I 2×2 तत्समकी आव्यूह है। वलयों की एक समाकारिता है। इस तरह सिद्ध कीजिए कि $\mathbb{Z} \cong \{nI \mid n \in \mathbb{Z}\}$

(c) यदि N समूह G का एक ऐसा प्रसामान्य उपसमूह है 2

जिसके लिए $\frac{G}{N}$ आबेली है, तब दिखाइए कि

$$[G, G] \subseteq N.$$

6. (a) कोटि 34 के कितने अतुल्याकारी समूह होते हैं? अपने उत्तर की पृष्टि कीजिए। 2
- (b) क्या PID का उपवलय PID है? अपने उत्तर की पृष्टि कीजिए। 6
- (c) दिखाइए कि $\{\bar{0}, \bar{3}\}$, Z_6 में एक उच्चिष्ट गुणजावली है। 2
7. बताइए निम्नलिखित में से कौन से कथन सत्य है? अपने उत्तरों के कारण बताइए? 10
- (a) यदि G कोटि 6 का चक्रीय समूह है, तब G के तीन अलग-अलग जनक होंगे।
- (b) यदि वलय में शून्य का भाजक है, तब इसमें शून्यभावी अवयव भी होते हैं।
- (c) समूह G के किन्हीं भी दो उपसमूहों का सम्मिलन भी G का उपसमूह होगा।
- (d) क्षेत्र में प्रत्येक शून्येतर अवयव शून्य का भाजक है।
- (e) समूह Z_{15} चक्रीय है।
-