

सत्रीय कार्य पुस्तिका

वास्तविक विश्लेशण

01 जनवरी, 2025 से 31 दिसंबर, 2025 तक वैध



**विज्ञान विद्यापीठ
इन्दिरा गांधी राष्ट्रीय मुक्त विश्वविद्यालय
मैदान गढ़ी, नई दिल्ली - 110 068**

2025

प्रिय विद्यार्थी,

हम उम्मीद करते हैं कि उपाधि कार्यक्रम में अपनाई गई मूल्यांकन पद्धति से आप भली-भांति परिचित हैं। आपके नामांकन के बाद हमने आपको ऐच्छिक पाठ्यक्रम की एक कार्यक्रम दर्शिका भेजी थी। उसमें सत्रीय कार्य से संबंधित जो भाग हैं उसे कृपया दुबारा पढ़ लें। जैसा कि आप जानते हैं निरन्तर मूल्यांकन के लिए 30% अंक निर्धारित किये गये हैं। इसके लिए आपको **एक सत्रीय कार्य** करना होगा। यह सत्रीय कार्य इस पुस्तिका में शामिल है।

सत्रीय कार्य से संबंधित निर्देश

इससे पहले कि आप किसी प्रश्न का उत्तर लिखें, निम्नलिखित निर्देशों को ध्यान से पढ़ें।

1) अपनी उत्तर पुस्तिका के पहले पृष्ठ पर सबसे ऊपर निम्नलिखित प्रारूप के आधार पर विवरण लिखें।

नामांकन संख्या :

नाम :

पता :

.....

.....

पाठ्यक्रम संख्या :

पाठ्यक्रम शीर्षक :

सत्रीय कार्य संख्या :

अध्ययन केंद्र :

दिनांक :

.....

कार्य के सही और शीघ्र मूल्यांकन के लिए दिये गए प्रारूप का सही अनुसरण करें।

2) अपना उत्तर लिखने के लिए फुलस्कैप कागज़ का इस्तेमाल करें, जो ज़्यादा पतला न हो।

3) प्रत्येक कागज़ पर बायें, ऊपर और नीचे 4 से. मी. की जगह छोड़ें।

4) आपके उत्तर स्पष्ट होने चाहिए।

5) प्रश्नों के हल लिखते समय, स्पष्ट संकेतों द्वारा बताएं कि किस प्रश्न का कौनसा भाग हल किया जा रहा है।

6) यह सत्रीय कार्य दिसम्बर, 2025 तक वैध है। यदि आप इस सत्रीय कार्य में फेल हो जाते हैं या इसे दिसम्बर, 2025 तक जमा करने में असफल रहते हैं तो आप जनवरी, 2026 का सत्रीय कार्य प्राप्त करें और उसे उस सत्रीय कार्य में दिए गए आदेशों के अनुसार जमा करें।

7) परीक्षा फार्म भरने से पहले सत्रीय कार्य करना अनिवार्य है।

अपनी उत्तर पुस्तिका की फोटोकॉपी ज़रूर रखिए।

शुभकामनाओं के साथ।

सत्रीय कार्य

पाठ्यक्रम कोड: **BMTC-133**
सत्रीय कार्य कोड :**BMTC-133/TMA/2025**
अधिकतम अंक: **100**

1. निम्नलिखित में से कौन-से कथन सत्य हैं या असत्य हैं? लघु उपपत्ति या प्रति-उदाहरण जो भी उचित हो, के साथ अपने उत्तरों के कारण बताइए : (10)

- i) प्रत्येक अनंत समुच्चय विवृत समुच्चय होता है।
- ii) $p \wedge \sim q$ का निषेध $p \rightarrow q$ है।
- iii) -1 अन्तराल $] -2, 1]$ का सीमा बिन्दु है।
- iv) फलन f के समाकलनीय होने के अनिवार्य प्रतिबंध है कि वह संतत हो।
- v) $f(x) = |x-2| + |3-x|$ द्वारा परिभाषित फलन $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $x=5$ पर अवकलनीय है।

2. क) निम्नलिखित श्रेणियों के अभिसरण की जाँच कीजिए : (6)

(i) $\sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1}, x > 0.$

(ii) $\sum_{n=1}^{\infty} [\sqrt{n^4+9} - \sqrt{n^4-9}]$

ख) कौशी अनुक्रम को परिभाषित कीजिए। सिद्ध कीजिए कि अनुक्रम $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, जहाँ $a_n = \frac{3^2}{x^2 + 2^2}$ कौशी है। (4)

3. क) दिखाइए कि समुच्चय : (5)

$$S = \left\{ \frac{1}{n} + \frac{1+(-1)^n}{3} : n \in \mathbb{N} \right\}$$

विवृत नहीं है।

ख) निम्नलिखित श्रेणी के अभिसरण की जाँच कीजिए : (5)

$$\frac{1}{3.4} + \frac{\sqrt{2}}{5.6} + \frac{\sqrt{3}}{7.8} + \dots \text{to } \infty$$

4. क) सिद्ध कीजिए कि फलन $f : S \rightarrow S$ (जहाँ S परिमित अरिक्त समुच्चय है) एकैकी है, यदि यह आच्छादी है। (3)

ख) एक उचित प्रति-उदाहरण देते हुए निम्नलिखित कथन को असिद्ध कीजिए : (2)

$$"(x+y)^n = x^n + y^n \quad \forall n \in \mathbb{N}, x, y \in \mathbb{Z}"$$

c) समुच्चय $S = \left\{ \frac{1}{n-1} : n \geq 2 \right\}$ का उच्चक और निम्नक ज्ञात कीजिए। (5)

5. क) दिखाइए कि प्रत्येक $[a, \infty)$ एक विवृत समुच्चय है। (3)

ख) निम्नलिखित कथन तथा उनके निषेध को तर्कसंगत प्रमात्रकों का प्रयोग करते हुए आप किस प्रकार प्रस्तुत करेंगे? निषेध को शब्दों में भी दीजिए। (3)

$$\exists x \in \mathbb{R} \text{ s.t. } x - \frac{1}{3} > 0$$

ग) मान लीजिए कि x और y दो वास्तविक संख्याएँ इस प्रकार हैं कि $x < y$ है। ऐसी एक अपरिमेय संख्या λ मालूम कीजिए जिस के लिए निम्नलिखित होता है। (4)

$$x < \lambda < y$$

6. क) सिद्ध कीजिए कि $e^x \cos 2x = 2$ के किन्हीं दो वास्तविक मूलों के बीच $e^x \sin 2x = 1$ का कम से कम एक वास्तविक मूल होता है। (5)

ख) मान लीजिए $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} :$ (5)

$$f(x) = \begin{cases} x^3 \cos\left(\frac{1}{2x}\right), & \text{if } x \neq 0 \\ 0, & \text{if } x = 0 \end{cases}$$

द्वारा परिभाषित फलन है। दिखाइए कि f' , \mathbb{R} पर संतत है लेकिन $x=0$ पर अवकलनीय नहीं है।

7. क) कॉशी समाकल परीक्षण द्वारा निम्नलिखित मूल्यांकन कीजिए : (4)

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left[\frac{n+1}{n^2+1^2} + \frac{n+2}{n^2+2^2} + \frac{n+3}{n^2+3^2} + \dots + \frac{1}{n} \right]$$

ख) समुच्चय $x \in [0, 2]$ और $n \in \mathbb{N}$, के लिए $f_n(x) = 3x^2 + \frac{2x}{n}$ लीजिए। अनुक्रम $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ का

सीमा फलन ' f ' ज्ञात कीजिए। क्या f संतत है? जाँच कीजिए कि $\int_0^2 f(x) dx$ और

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^2 f_n(x) dx \text{ समान हैं या नहीं।} \quad (6)$$

8. क) त्रिज्या $\sum a_n x^n$ जहाँ $a_n = \frac{n!}{n^n}$ की अभिसरण त्रिज्या ज्ञात कीजिए। (3)

ख) मान लीजिए $f(x) = \begin{cases} \frac{x+2}{x^2-4}, & \text{जहाँ } x \neq -2 \\ -1 & , \text{ जहाँ } x = -2 \end{cases}$

जाँच की $f, [-1,1]$ पर एकसमान सांतत्य है या नहीं। (3)

ग) सिद्ध कीजिए :

$$e^{-x} < 1 - x + \frac{x^2}{2!}, x > 0. \quad (4)$$

9. क) सिद्ध कीजिए कि फलनों का अनुक्रम $\{f_n\}$ जहाँ

$$f_n(x) = \frac{n}{x+n}$$

$[0, k]$ पर एकसमानतः अभिसरित है जहाँ $k > 0$ है। आगे सिद्ध कीजिए कि $\{f_n\}, [0, \infty[$ पर एकसमानतः अभिसरित नहीं है। (6)

ख) रीमान समाकलन से $\int_0^1 x^2 dx$ परिकलित कीजिए। (4)

10. क) x के वे मान ज्ञात कीजिए जिन के लिए श्रेणी

$$\sum \frac{1.3.5 \dots (2n-1)}{2.4.6 \dots 2n} \cdot \frac{x^n}{n}$$

अभिसरित होती है। (4)

ख) निम्नलिखित के एक-एक उदाहरण दीजिए। अपने चयन की पुष्टि कीजिए। (6)

- i) एक अनुक्रम जो अपसारी है।
- ii) एक समुच्चय जो विवृत है लेकिन संवृत नहीं है।
- iii) संहत समुच्चय।
- iv) एक समुच्चय जिसका कोई सीमा बिन्दु नहीं है।