BMTC-134

सत्रीय कार्य पुस्तिका

स्नातक उपाधि कार्यक्रम
(बी.एस.सी.जी / बी.ए.जी)

बीजगणित

1 जनवरी, 2023 से 31 दिसंबर, 2023 तक वैध

विज्ञान विद्यापीठ
इन्दिरा गांधी राष्ट्रीय मुक्त विश्वविद्यालय
मैदान गढ़ी, नई दिल्ली-110 068
(2023)

प्रिय विद्यार्थी,

हम उम्मीद करते हैं कि स्नातक उपाधि कार्यक्रम में अपनाई गई मूल्यांकन पद्धति से आप भली-भांति परिचित हैं। आपके नामांकन के बाद हमने आपको BAG/BSCG पाठ्यक्रम की एक कार्यक्रम दर्शिका भेजी थी। उसमें सत्रीय कार्य से संबंधित जो भाग है, उसे कृपया दुबारा पढ़ लें। जैसा कि आप जानते हैं निरन्तर मूल्यांकन के लिए 30% अंक निर्धारित किए गए हैं। इसके लिए आपको **एक सत्रीय कार्य** जो तीन भागों में है - भाग 'क', भाग 'ख' एवं भाग 'ग' करना होगा। भाग 'क' खंडों 1 और 2 से संबंधित है; भाग 'ख' खंड 3 से, और भाग 'ग' खंड 4 से संबंधित है। तीनों भागों को मिलाकर अधिकतम अंक 100 हैं, जिनमें से सफ़ल होने के लिए आपको कम से कम 35 अंक मिलने चाहिए। तीनों भाग इस सत्रीय पुस्तिका में है।

सत्रीय कार्य से संबंधित निर्देश

इससे पहले कि आप किसी प्रश्न का उत्तर लिखें, निम्नलिखित निर्देशों को ध्यान से पढ़ें।

1) अपनी उत्तर पुस्तिका के पहले पृष्ठ पर सबसे ऊपर निम्नलिखित प्रारूप के आधार पर विवरण लिखें।

नामांकन संख्या : ……………………………..

नाम : ……………………………..

पता : ……………………………..

……………………………..

……………………………..

पाठ्यक्रम संख्याः ……………………………….

पाठ्यक्रम शीर्षक : ……………………………….

सत्रीय कार्य संख्या : ……………………………….

अध्ययन केंद्र : ……………………………….   दिनांक :

……………………........

कार्य के सही और शीघ्र मूल्यांकन के लिए दिये गए प्रारूप का सही अनुसरण करें।

2) अपना उत्तर लिखने के लिए फुलस्कैप कागज़ का इस्तेमाल करें, जो बहुत पतला न हो।

3) प्रत्येक कागज़ पर बायें, ऊपर और नीचे 4 से.मी. जगह छोड़ें।

4) आपके उत्तर स्पष्ट होने चाहिए।

5) इस सत्रीय कार्य के भाग 'क', भाग 'ख' और भाग 'ग' को **अलग-अलग हल करके लिखिए, और अपने जवाबी कागज़ों को आख़िरी तारीक़ से पहले जमा कीजिए।**

6) **यह सत्रीय कार्य दिसम्बर, 2023 तक वैध** है। यदि आप इस सत्रीय कार्य में फ़ेल हो जाते हैं या इसे दिसम्बर, 2023 तक जमा करने में असफ़ल रहते हैं, तो आप अगले सत्र का सत्रीय कार्य प्राप्त करें और उसे उस सत्रीय कार्य में दिए गए आदेशों के अनुसार जमा करें।

7) **परीक्षा फ़ॉर्म भरने से पहले सत्रीय कार्य करना ज़रूरी है।**

अपनी उत्तर पुस्तिका की एक प्रति अपने पास अवश्य रखें।

हमारी शुभकामानाओं के साथ।

सत्रीय कार्य

पाठ्यक्रम कोड: **BMTC-134**

सत्रीय कार्य कोड: **BMTC-134/TMA/2023**

अधिकतम अंक: **100**

भाग-क (अधिकतम अंक: 50)

(खंड 1 और 2 को पढ़ने के बाद ही इस सत्रीय कार्य को कीजिए।)

1. निम्नलिखित कथनों में से कौन-से कथन सत्य हैं? अपने उत्तरों की पुष्टि कीजिए। (10)

   i) यदि एक समूह G अपने किसी उचित उपसमूह के तुल्याकारी है, तो $G = \mathbb{Z}$.

   ii) यदि x और y एक अना-बेली समूह $(G, *)$ के ऐसे अवयव हैं जिनके लिए $x * y = y * x$, तो $x = e$ या $y = e$, जहाँ e, $*$ के सापेक्ष G का तत्समक है।

   iii) अभाज्य कोटि वाला एक और केवल एक अन्‌बेली समूह है।

   iv) यदि $(a, b) \in A \times A$, जहाँ A एक समूह है, तो $o((a, b)) = o(a)o(b)$.

   v) यदि H और K समूह G के प्रसामान्य उपसमूह हैं, तो $hk = kh \ \forall\ h \in H, k \in K$.

2. क) सिद्ध कीजिए कि चक्रीय समूह के प्रत्येक अतुच्छ उपसमूह का परिमित सूचकांक होता है। इस तरह सिद्ध कीजिए कि $(\mathbb{Q}, +)$ चक्रीय नहीं है। (7)

   ख) मान लीजिए G एक ऐसा अपरिमित समूह है जिससे कि G के किसी भी अतुच्छ उपसमूह H के लिए $|G : H| < \infty$, तो सिद्ध कीजिए कि

   i) $H \leq G \Rightarrow H = \{e\}$ या H अपरिमित है;

   ii) यदि $g \in G, g \neq e$, तो $o(g)$ अपरिमित है। (5)

   ग) सिद्ध कीजिए कि केवल एक जनक वाले चक्रीय समूह के अधिक से अधिक 2 अवयव हो सकते हैं। (3)

3. क) केली प्रमेय की सहायता से एक ऐसा क्रमचय समूह ज्ञात कीजिए जो कि कोटि 12 वाले चक्रीय समूह के तुल्याकारी हो। (4)

   ख) मान लीजिए S_{10} में τ एक नियत विषम क्रमचय है। दिखाइए कि S_{10} का प्रत्येक विषम क्रमचय τ और A_{10} के किसी क्रमचय का गुणनफल है। (2)

   ग) यदि D_{10} में r एक परावर्तन है, तो D_{10} में $< r >$ के दो अलग-अलग सहसमुच्चय दीजिए। (2)

   घ) वह न्यूनतम $n \in \mathbb{N}$ दीजिए जिसके लिए A_n अन्‌बेली है। अपने उत्तर की पुष्टि कीजिए। (2)

4. समूह समाकारिता के मूल प्रमेय की सहायता से निम्नलिखित प्रमेय, जिसे **ज़ासनहाउस (तितली) प्रमेयिका** कहा जाता है, को सिद्ध कीजिए।

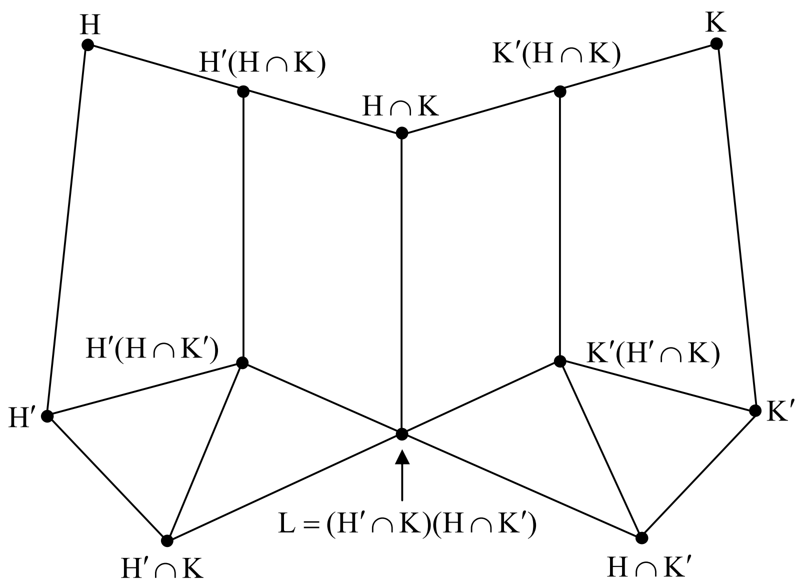
मान लीजिए H और K समूह G के उपसमूह हैं और H' और K', H और K के प्रसामान्य उपसमूह हैं। तब

i) $H'(H \cap K') \triangleleft H'(H \cap K)$,

ii) $K'(H' \cap K) \triangleleft K'(H \cap K)$,

iii) $\dfrac{H'(H \cap K)}{H'(H \cap K')} \simeq \dfrac{K'(H \cap K)}{K'(H' \cap K)} \simeq \dfrac{(H \cap K)}{(H' \cap K)(H \cap K')}$. (15)

इस स्थिति को नीचे दिए गए उपसमूह आरेख से निरूपित किया जा सकता है, जो 'तितली' जैसा है। .



भाग-ख (अधिकतम अंक: 30)

(खंड 3 पर आधारित)

5. निम्नलिखित कथनों में से कौन-से कथन सत्य हैं और कौन-से असत्य हैं? अपने उत्तर की पुष्टि कीजिए। (10)

i) किसी भी वलय R और $a, b \in R$ के लिए, $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$.

ii) किसी भी वलय में कम-से-कम दो अवयव होते हैं।

iii) यदि R एक तत्समकी वलय है और I, R की एक गुणजावली है, तो R/I का तत्समक वही होता है जो कि R का तत्समक है।

iv) यदि $f: R \to S$ एक वलय समाकारिता है, तो यह $(R, +)$ से $(S, +)$ तक एक समूह समाकारिता है।

v) यदि R एक वलय है, तो $R \times R$ से R तक कोई भी वलय समाकारिता आच्छादक होता है।

6. क) क्रमविनिमेय वलय R की गुणजावली I के लिए,
$\sqrt{I} = \{x \in R \mid x^n \in I$, किसी $n \in \mathbb{N}$ के लिए$\}$ परिभाषित कीजिए। दिखाइए कि

i) $\sqrt{I}$, R की एक गुणजावली है।

ii) $I \subseteq \sqrt{I}$.

iii) कुछ स्थितियों में $I \neq \sqrt{I}$. (5)

ख) क्या वलय R की कोई भी दो गुणजावलियों I और J के लिए, $\frac{R}{I} \times \frac{R}{J} \simeq \frac{R \times R}{I \times J}$? अपने उत्तर की पुष्टि कीजिए। (5)

7. मान लीजिए S एक समुच्चय है, R एक वलय है और f, S से R तक एक 1-1 आच्छादक फलन है। S पर + और · को निम्नलिखित से परिभाषित कीजिए:
$x + y = f^{-1}(f(x)) + f(y))$
$x \cdot y = f^{-1}(f(x) \cdot f(y))$
$\forall\ x, y \in S$.
दिखाइए कि (S, +, ·), R के तुल्याकारी एक वलय है। (10)

भाग-ग (अधिकतम अंक: 20)

(खंड 4 पर आधारित)

8. निम्नलिखित में से कौन-से कथन सत्य हैं, और कौन-से असत्य? अपने उत्तरों के कारण दीजिए। (10)

i) यदि k एक क्षेत्र है, तो $k \times k$ भी क्षेत्र होगा।

ii) यदि R एक पूर्णांकीय प्रांत है और I, R की गुणजावली है, तो Char (R) = Char (R/I).

iii) प्रांत में प्रत्येक अभाज्य गुणजावली एक उच्चिष्ठ गुणजावली होती है।

iv) यदि R एक वलय है जिसमें शून्य के भाजक हैं और S, R का एक उपवलय है, तब S में भी शून्य के भाजक होंगे।

v) यदि R एक वलय है और $f(x) \in R[x]$ की घात $n \in \mathbb{N}$ है, तब f(x) के R में ठीक n मूल हैं।

9. क) $\mathbb{Z}[\sqrt{-7}]$ के सभी मात्रक मालूम कीजिए। (4)

ख) जाँच कीजिए कि $\mathbb{Q}[x] / < 8x^3 + 6x^2 - 9x + 24 >$ एक क्षेत्र है या नहीं। (3)

ग) 125 अवयव वाला एक क्षेत्र बनाइए। (3)