

I =h; dk; Zi qLrdk

Lukrd mi kf/k dk; Øe
½ch, I I h-th@ch, -th½

okLrfod fo'yšk.k

1 tuojh 2022 I s31 fnl ej 2022 rd ošk



foKku fo | ki hB
bflnjk xkalk jk"Vh; eDr fo'ofok | ky;
ešku x<h ubzfnYyh-110 068
(2022)

प्रिय विद्यार्थी,

हम उम्मीद करते हैं कि स्नातक उपाधि कार्यक्रम में अपनाई गई मूल्यांकन पद्धति से आप भली-भांति परिचित हैं। आपके नामांकन के बाद हमने आपको ऐच्छिक पाठ्यक्रम की एक कार्यक्रम दिका भेजी थी। उसमें सत्रीय कार्य से संबंधित जो भाग हैं उसे कृपया दुबारा पढ़ लें। जैसा कि आप जानते हैं निरन्तर मूल्यांकन के लिए 30% अंक निर्धारित किये गये हैं। इसके लिए आपको, ; g l =h; dk; L करना होगा। यह सत्रीय कार्य इस पुस्तिका में शामिल है।

l =h; dk; L l s l c f /kr fun d k

इससे पहले कि आप किसी प्रश्न का उत्तर लिखें, निम्नलिखित निर्देशों को ध्यान से पढ़ें।

1) अपनी उत्तर पुस्तिका के पहले पृष्ठ पर सबसे ऊपर निम्नलिखित प्रारूप के आधार पर विवरण लिखें।

नामांकन

संख्या.....

नाम :

पता :

.....

.....

पाठ्यक्रम संख्या :

पाठ्यक्रम शीर्षक :

सत्रीय कार्य संख्या :

अध्ययन केंद्र :

दिनांक :

dk; L ds l gh v l s ' k h ? k e W ; k a d u ds fy , f n , x , i k : i dk l gh v u l j . k d j A

2) अपना उत्तर लिखने के लिए फुलस्कैप कागज़ का इस्तेमाल करें, जो ज़्यादा पतला न हो।

3) प्रत्येक कागज़ पर बांयें, ऊपर और नीचे 4 से. मी. की जगह छोड़ें।

4) आपके उत्तर स्पष्ट होने चाहिए।

5) प्र नों के हल लिखते समय, स्पष्ट संकेतों द्वारा बताएं कि किस प्र न का कौनसा भाग हल किया जा रहा है।

6) यह सत्रीय कार्य दिसम्बर, 2022 तक वैध है। यदि आप इस सत्रीय कार्य में फेल हो जाते हैं या इसे दिसम्बर, 2022 तक जमा करने में असफल रहते हैं तो आप जनवरी, 2023 का सत्रीय कार्य प्राप्त करें और उसे उस सत्रीय कार्य में दिए गए आदेशों के अनुसार जमा करें।

7) परीक्षा फार्म भरने से पहले सत्रीय कार्य करना अनिवार्य है।

अपनी उत्तर पुस्तिका की फोटोकॉपी ज़रूर रखिए।

' k h k d k e u k / k a ds l k f k A

$I = h; dk; l$

ikB; Øe dkm: **BMTC-133**
I = h; dk; l dkm: **BMTC-133/TMA/2022**
vf/kdre vd: **100**

Hkkx d (20 vd)

1. निम्नलिखित में से कौन से कथन सत्य हैं और कौन से असत्य? अपने उत्तर की पुष्टि एक लघु-उपपत्ति या प्रतिउदाहरण देकर कीजिए। (10)

i) यदि x और y वास्तविक संख्याएं इस प्रकार हैं कि $x < y$ है, तो $x^2 < y^2$ है।

ii) प्रत्येक परिमित समुच्चय S के लिए $\sup S \in S$ होता है।

iii) एक ऐसा अंतराल है जिसके उच्चिष्ठ और निम्निष्ठ बराबर हैं।

iv) अनुक्रम $\left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots\right)$ अपरिबद्ध है।

v) यदि कोई अनुक्रम परिबद्ध है तो इसके कम से कम दो अभिसारी उप-अनुक्रम होंगे।

2. निम्न में से प्रत्येक के लिए एक उदाहरण दीजिए। (10)

i) \mathbb{R} में एक समुच्चय जिसका अद्वितीय सीमा बिंदु हो।

ii) \mathbb{R} में एक समुच्चय जिसके किसी एक बिंदु को छोड़कर बाकी सभी बिंदु इसके सीमा बिंदु हों।

iii) एक समुच्चय जिसका कोई सीमा बिंदु ना हो।

iv) एक समुच्चय S जिसके लिए $S^\circ = \bar{S}$ हो।

v) \mathbb{N}_{odd} से \mathbb{Z} पर एक एकैकी-आच्छादन

Hkkx [k (30 vd)

3. क) एक ऐसे अपसारी अनुक्रम का उदाहरण दीजिए जिसके दो अभिसारी उप-अनुक्रम हों। अपने दावे की पुष्टि कीजिए। (3)

ख) दो अपसारी अनुक्रमों का गुणनफल अपसारी होता है। सत्य है या असत्य? पुष्टि कीजिए। (2)

ग) मान लीजिए $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ कोई अनुक्रम है। दिखाइए कि $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L$ यदि और केवल यदि प्रत्येक $\varepsilon > 0$ के लिए किसी $N \in \mathbb{N}$ का अस्तित्व इस प्रकार है कि $n \geq N$ से यह अर्थ निकलता है कि $a_n \in N_\varepsilon(L)$ है। (3)

घ) दिखाइए कि $\left(\frac{1}{n^2+n+1}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ एक कौशी अनुक्रम है। (3)

ड.) मान ज्ञात कीजिए :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{n}{1+n^2} + \frac{n}{4+n^2} + \frac{n}{9+n^2} + \cdots + \frac{n}{2n^2} \right]. \quad (4)$$

4. क) फलन f के असांतत्य के बिंदु ज्ञात कीजिए और उनमें से प्रत्येक बिंदु पर असांतत्य की प्रकृति ज्ञात कीजिए :

$$f(x) = \begin{cases} -x^2, & \text{जब } x \leq 0 \\ 4-5x, & \text{जब } 0 < x \leq 1 \\ 3x-4x^2, & \text{जब } 1 < x \leq 2 \\ -12x+2x, & \text{जब } x > 2 \end{cases}$$

साथ ही यह जाँच कीजिए फलन f , $x=1$ पर अवकलनीय है या नहीं। (5)

ख) निम्नलिखित सीमा ज्ञात कीजिए।

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x^2}{x^2 \sin x^2} \quad (3)$$

ग) सिद्ध कीजिए कि प्रत्येक निरंतर ह्रासमान फलन एकैकी होता है। (2)

घ) $f(x) = 3 - 5x^3 + 5x^4 - x^5$ द्वारा परिभाषित फलन f के स्थानीय निम्निष्ठ और स्थानीय उच्चिष्ठ मान ज्ञात कीजिए। (5)

॥कx x (50 val)

5. क) मान लीजिए $f : [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$ एक फलन है जो $f(x) = x^m(1-x)^n$ से परिभाषित है, जहाँ $m, n \in \mathbb{N}$ है। m और n के मान इस प्रकार ज्ञात कीजिए कि रोल प्रमेय फलन f के लिए सत्य हो। (3)

ख) मान लीजिए $f, [\alpha, \beta]$ पर एक अवकलनीय फलन है, और $x \in [\alpha, \beta]$ है। दिखाइए कि यदि $f'(x) = 0$ और $f''(x) > 0$ है तो f का x पर स्थानीय उच्चिष्ठ मान है। (3)

ग) मान लीजिए $f : [0,2] \rightarrow \mathbb{R}$, $[0,2]$ पर संतत है और $]0,2[$ पर अवकलनीय है, और $f(0) = 0, f(1) = 1, f(2) = 1$ है। (4)

(i) दिखाइए कि कोई $c_1 \in (0,1)$ इस प्रकार है कि $f'(c_1) = 1$ है।

(ii) दिखाइए कि कोई $c_2 \in (1,2)$ इस प्रकार है कि $f'(c_2) = 0$ है।

(iii) दिखाइए कि कोई $c \in (0,2)$ इस प्रकार है कि $f'(c) = \frac{1}{3}$ है।

6. क) निम्नलिखित श्रेणियों के अभिसरण की जाँच कीजिए। (6)

(i) $\sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1}, x > 0.$

(ii) $\sum_{n=1}^{\infty} [\sqrt{n^4 + 9} - \sqrt{n^4 - 9}]$

ख) दिखाइए कि $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{5}{7n+2}$ सापेक्ष अभिसारी है। (4)

7. क) कॉशी मध्यमान प्रमेय का प्रयोग करके सिद्ध कीजिए :

$$\frac{\cos \alpha - \cos \beta}{\sin \alpha - \sin \beta} = \tan \theta, 0 < \alpha < \theta < \beta < \frac{\pi}{2} \quad (5)$$

ख) वायस्ट्रास M-परीक्षण का प्रयोग करके दिखाइए कि निम्नलिखित श्रेणी एकसमानतः अभिसरित होती है : (5)

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^3 x^n, x \in \left[-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right].$$

8. क) समाकलन-गणित के मूल प्रमेय का प्रयोग करके समाकल

$$\int_0^1 \left(2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x} \right) dx.$$

का मान ज्ञात कीजिए। (5)

ख) व्युत्क्रम फलन प्रमेय का प्रयोग करके दिखाइए कि $f(x) = 2x + 7$ द्वारा परिभाषित फलन $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ का व्युत्क्रम है। इसका व्युत्क्रम भी ज्ञात कीजिए। (5)

9. क) जाँच कीजिए कि श्रेणी $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 x^5}{n^4 + x^3}, x \in [0, \alpha]$ एकसमानतः अभिसारी है या नहीं, जहाँ $\alpha \in \mathbb{R}^+$ है। (4)

ख) दिखाइए कि श्रेणी $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\theta}{n}$ अंतराल $]0, 2\pi[$ पर एकसमानतः अभिसरित नहीं होती है। (4)

ग) यदि घात श्रेणी $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n,]\alpha, \beta[$ में एकसमानतः अभिसरित होती है, तो $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (-x)^n$ भी होगी। सत्य है या असत्य? पुष्टि कीजिए। (2)