

MTE-09

सत्रीय कार्य पुस्तिका

वास्तविक विश्लेषण

1 जनवरी 2025 से 31 दिसंबर 2025 तक वैध



विज्ञान विद्यापीठ
इन्दिरा गांधी राष्ट्रीय मुक्त विश्वविद्यालय
मैदान गढ़ी, नई दिल्ली -110 068
2025

प्रिय विद्यार्थी,

हम उम्मीद करते हैं कि उपाधि कार्यक्रम में अपनाई गई मूल्यांकन पद्धति से आप भली-भांति परिचित हैं। आपके नामांकन के बाद हमने आपको ऐच्छिक पाठ्यक्रम की एक कार्यक्रम दर्शिका भेजी थी। उसमें सत्रीय कार्य से संबंधित जो भाग हैं उसे कृपया दुबारा पढ़ लें। जैसा कि आप जानते हैं निरन्तर मूल्यांकन के लिए 30% अंक निर्धारित किये गये हैं। इसके लिए आपको **एक सत्रीय कार्य** करना होगा। यह सत्रीय कार्य इस पुस्तिका में शामिल है।

सत्रीय कार्य से संबंधित निर्देश

इससे पहले कि आप किसी प्रश्न का उत्तर लिखें, निम्नलिखित निर्देशों को ध्यान से पढ़ें।

1) अपनी उत्तर पुस्तिका के पहले पृष्ठ पर सबसे ऊपर निम्नलिखित प्रारूप के आधार पर विवरण लिखें।

नामांकन
संख्या.....
नाम :
पता :
.....
पाठ्यक्रम संख्या :
पाठ्यक्रम शीर्षक :
सत्रीय कार्य संख्या :
अध्ययन केंद्र :
दिनांक :

कार्य के सही और शीघ्र मूल्यांकन के लिए दिए गए प्रारूप का सही अनुसरण करें।

- 2) अपना उत्तर लिखने के लिए फुलस्कैप कागज़ का इस्तेमाल करें, जो ज़्यादा पतला न हो।
- 3) प्रत्येक कागज़ पर बायें, ऊपर और नीचे 4 से. मी. की जगह छोड़ें।
- 4) आपके उत्तर स्पष्ट होने चाहिए।
- 5) प्रश्नों के हल लिखते समय, स्पष्ट संकेतों द्वारा बताएं कि किस प्रश्न का कौनसा भाग हल किया जा रहा है।
- 6) यह सत्रीय कार्य दिसम्बर, 2025 तक वैध है। यदि आप इस सत्रीय कार्य में फेल हो जाते हैं या इसे दिसम्बर, 2025 तक जमा करने में असफल रहते हैं तो आप जनवरी, 2026 का सत्रीय कार्य प्राप्त करें और उसे उस सत्रीय कार्य में दिए गए आदेशों के अनुसार जमा करें।
- 7) परीक्षा फार्म भरने से पहले सत्रीय कार्य करना अनिवार्य है।

अपनी उत्तर पुस्तिका की फोटोकॉपी ज़रूर रखिए।

शुभकामनाओं के साथ।

सत्रीय कार्य

पाठ्यक्रम कोड : एम. टी. ई. - 09

सत्रीय कार्य कोड : एम. टी. ई. - 09/ टी एम ए / 2025

अधिकतम अंक : 100

1. बताइए निम्नलिखित कथन सत्य हैं या असत्य। अपने उत्तरों के कारण बताइए। (10)

क) -2 अंतराल $]-3, 2]$ का सीमा बिन्दु है।

ख) श्रेणी $\frac{1}{2} - \frac{1}{6} + \frac{1}{10} - \frac{1}{4} + \dots$ अपसारी है।

ग) फलन $f(x) = \sin^2 x$ अंतराल $[0, \pi]$ पर एकसमानतः सतत है।

घ) प्रत्येक सतत फलन अवकलनीय है।

ड.) $f(x) = \begin{cases} 0, & x \text{ परिमेय है} \\ 2, & x \text{ अपरिमेय है} \end{cases}$

द्वारा \mathbb{R} पर परिभाषित फलन f अंतराल $[2, 3]$ में समाकलनीय है।

2) क) सिद्ध कीजिए कि दो संवृत समुच्चयों का सम्मिलन संवृत समुच्चय है। यह दिखाने के लिए एक उदाहरण दीजिए कि संवृत समुच्चयों की परिमित संख्या का सम्मिलन संवृत समुच्चय नहीं भी हो सकता है। (4)

ख) \mathbf{R} पर सातत्य के लिए

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{6} (x+1)^3 & x \neq 0 \\ \frac{5}{6} & x = 0 \end{cases}$$

द्वारा परिभाषित फलन $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ की जाँच कीजिए। यदि \mathbf{R} के किसी बिन्दु पर सतत नहीं है तब असातत्य का प्रकार ज्ञात कीजिए (4)

ग) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^2 x}{x^2 \sin x^2}$ ज्ञात कीजिए। (2)

3) क) गणितीय आगम नियम द्वारा सिद्ध कीजिए कि $\frac{n^5}{5} + \frac{n^3}{3} + \frac{7n}{15}$ एक प्राकृत संख्या है, $\forall n \in \mathbf{N}$. (4)

ख) दिखाइए कि ऐसी कोई वास्तविक संख्या k नहीं है जिसके लिए समीकरण $x^4 - 3x^2 + k = 0$ के अंतराल $[2, 3]$ में दो अलग-अलग मूल होते हैं। (3)

ग) मान लीजिए $f: [-3, 3] \rightarrow \mathbf{R}$, $f(x) = 5(x) + x^3$ द्वारा परिभाषित है, जहाँ $[x]$ महत्तम पूर्णांक $\leq x$ को निरूपित करता है। दिखाइए कि यह फलन समाकलनीय है। (3)

4. क) सातत्य की अनुक्रमिक परिभाषा द्वारा सिद्ध कीजिए कि

$$f(x) = \begin{cases} 2, & \text{यदि } x \text{ अपरिमेय है} \\ -2, & \text{यदि } x \text{ परिमेय है} \end{cases}$$

द्वारा परिभाषित फलन f असतत है, $\forall x \in \mathbf{R}$ । (4)

ख) निम्नलिखित श्रेणी के अभिसरण की जाँच कीजिए : (4)

i) $\frac{3 \times 4}{5^2} + \frac{5 \times 6}{7^2} + \frac{7 \times 8}{9^2} + \dots$

ii) $1 + 4x + 4^2 x^2 + 4^3 x^3 + \dots (x > 0)$

ग) सिद्ध कीजिए कि पूर्णाकों का समुच्चय गणनीय है। (2)

5. क) सिद्ध कीजिए कि (4)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{\sqrt{2n-1}} + \frac{1}{\sqrt{4n-2^2}} + \frac{1}{\sqrt{6n-3^2}} + \dots + \frac{1}{n} \right] = \frac{\pi}{2}$$

ख) सिद्ध कीजिए कि अनुक्रम $\left\{ \frac{a_n}{n} \right\}$ अभिसारी है जहाँ $\{a_n\}$ परिबद्ध अनुक्रम है। (3)

ग) सिद्ध कीजिए कि संतत फलन का संतत फलन संतत होता है। (3)

6. क) चरम मानों के लिए फलन $f(x) = (x+1)^3 (x-3)^2$ की जाँच कीजिए। (4)

ख) दिखाइए कि किसी भी $\alpha > 0$ श्रेणी $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{1+n^2 x^2}$, $[\alpha, 1]$ में एकसमानतः अभिसारी है। (4)

ग) उचित पुष्टि के साथ सीमा बिन्दुओं की परिमित संख्या वाले एक अपरिमित समुच्चय का उदाहरण दीजिए। (2)

7. क) दिखाइए कि (4)

i) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x-3}{x-1} \right)^x = \frac{1}{e^2}$

ii) $\lim_{x \rightarrow \frac{5}{3}} \frac{1}{(3x+5)^2} = \infty$

ख) $[1, 5]$ पर परिभाषित फलन $f(x) = x^2 - 2$ के लिए सत्यापित कीजिए : $L(P, f) \leq U(-P, f)$ जहाँ P एक विभाजन है जो $[1, 5]$ को चार बराबर अंतरालों में विभाजित करता है। (3)

ग) मान लीजिए $a_1 = 3, a_{n+1} = \frac{1}{5} a_n$ के रूप में परिभाषित अनुक्रम $\{a_n\}$ है। दिखाइए कि $\{a_n\}$ शून्य तक अभिसरण करता है। (3)

8. क) फलन के सातत्य की अनुक्रमिक परिभाषा का प्रयोग करते हुए सिद्ध कीजिए कि (4)

$$f(x) = \begin{cases} 3, & \text{if } x \text{ is irrational} \\ -3, & \text{if } x \text{ is rational} \end{cases}$$

द्वारा परिभाषित फलन f , प्रत्येक वास्तविक संख्या पर असंतत है।

ख) दिखाइए कि वक्र $y = 3x^2 - 7x + 6$, पर बिन्दुओं को, जिनकी भुज $x=1$ और $x=2$, हैं, मिलाने वाली जीवा उस बिन्दु पर खींची गई स्पर्श रेखा के समान्तर होती है जिसकी भुजा $x = \frac{3}{2}$ । (4)

ग) ऐसी श्रेणी $\sum a_n$ का उदाहरण दीजिए जिसके लिए $\sum a_n$ अभिसारी नहीं है लेकिन अनुक्रम (a_n) 0 की ओर अभिसरण करता है। (2)

9. क) निरपेक्ष और सप्रतिबंध अभिसरण के लिए श्रेणी (3)

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{\sin nx}{n\sqrt{n}}$$

की जाँच कीजिए।

ख) जाँच कीजिए : (4)

$$f(x) = (x-4)^3(x+1)^2$$

द्वारा दिए गए फलन f का स्थानीय उच्चिष्ठ और स्थानीय निम्निष्ठ होता है या नहीं।

ग) जाँच कीजिए कि : (3)

$$G' = \left\{ \left[\frac{1}{n+2}, \frac{1}{n} \right] : n \in \mathbb{N} \right\}$$

द्वारा दिया गया संग्रह $G,]0,1[$ का विवृत आवरक है या नहीं।

10. क) समाकलों के लिए बोनट के माध्य मान प्रमेय का कथन दीजिए (4)

$$\left| \int_3^5 \frac{\cos x}{x} dx \right| \leq \frac{2}{3}$$

दिखाने के लिए इसे लागू कीजिए।

ख) दिखाइए कि अनुक्रम (a_n) , एकदिष्ट है, जहाँ $a_n = \frac{n}{n^2+4}$ । क्या (a_n) कॉशी अनुक्रम है? अपने उत्तर की पुष्टि कीजिए। (4)

ग) जाँच कीजिए कि अंतराल $[2,5]$ और $[7,10]$ तुल्य हैं या नहीं। (2)