

सत्रीय कार्य पुस्तिका

स्नातक उपाधि कार्यक्रम

एम. टी. ई.-14

गणितीय निदर्शन

(01 जनवरी, 2024 से 31 दिसंबर, 2024 तक वैध)

परीक्षा फार्म भरने से पहले सत्रीय कार्य जमा करना ज़रूरी है।



विज्ञान विद्यापीठ
इन्दिरा गांधी राष्ट्रीय मुक्त विश्वविद्यालय
मैदान गढ़ी, नई दिल्ली - 110 068

2024

प्रिय विद्यार्थी,

हम उम्मीद करते हैं कि स्नातक उपाधि कार्यक्रम में अपनाई गयी मूल्यांकन पद्धति से आप भली-भांति परिचित हैं। आपके नामांकन के बाद हमने आपको ऐच्छिक पाठ्यक्रम की एक कार्यक्रम दर्शिका भेजी थी। उसमें सत्रीय कार्य से संबंधित जो भाग है, उसे कृपया दुबारा पढ़ लें। जैसा कि आप जानते हैं निरंतर मूल्यांकन के लिए 30% अंक निर्धारित किए गए हैं। इसके लिए आपको एक **सत्रीय कार्य** करना होगा। यह सत्रीय कार्य इस पुस्तिका में शामिल है।

सत्रीय कार्य से संबंधित निर्देश

इससे पहले कि आप किसी प्रश्न का उत्तर लिखें, निम्नलिखित निर्देशों को ध्यान से पढ़ें।

1) अपनी उत्तर पुस्तिका के पहले पृष्ठ पर सबसे ऊपर निम्नलिखित प्रारूप के आधार पर विवरण लिखें।

नामांकन संख्या :

नाम :

पता :

.....

.....

पाठ्यक्रम संख्या :

पाठ्यक्रम शीर्षक :

सत्रीय कार्य संख्या :

अध्ययन केंद्र :

दिनांक :

.....

कार्य के सही और शीघ्र मूल्यांकन के लिए दिये गए प्रारूप का सही अनुसरण करें।

- 2) अपना उत्तर लिखने के लिए फुलस्कैप कागज़ का इस्तेमाल करें, जो बहुत पतला न हो।
- 3) प्रत्येक कागज़ पर बायें, ऊपर और नीचे 4 से.मी. जगह छोड़ें।
- 4) आपके उत्तर स्पष्ट होने चाहिए।
- 5) प्रश्नों के हल लिखते समय, स्पष्ट संकेतों द्वारा बताएं कि किस प्रश्न का कौन सा भाग हल किया जा रहा है।
- 6) यह सत्रीय कार्य 31 दिसम्बर, 2024 तक वैध है। यदि आप इस सत्रीय कार्य में फ़ेल हो जाते हैं या इसे 31 दिसम्बर, 2024 तक जमा करने में असफल रहते हैं, तो आप जनवरी, 2025 सत्र का सत्रीय कार्य प्राप्त करें और उसे उस सत्रीय कार्य में दिए गए आदेशों के अनुसार जमा करें।
- 7) परीक्षा फ़ार्म भरने से पहले सत्रीय कार्य करना ज़रूरी है।

अपनी उत्तर पुस्तिका की एक प्रति अपने पास अवश्य रखें।

शुभकामनाओं के साथ।

प्रिय विद्यार्थी,

हम उम्मीद करते हैं कि स्नातक उपाधि कार्यक्रम में अपनाई गयी मूल्यांकन पद्धति से आप भली-भांति परिचित हैं। आपके नामांकन के बाद हमने आपको ऐच्छिक पाठ्यक्रम की एक कार्यक्रम दर्शिका भेजी थी। उसमें सत्रीय कार्य से संबंधित जो भाग है, उसे कृपया दुबारा पढ़ लें। जैसा कि आप जानते हैं निरन्तर मूल्यांकन के लिए 30% अंक निर्धारित किए गए हैं। इसके लिए आपको यह **सत्रीय कार्य** करना होगा। यह सत्रीय कार्य इस पुस्तिका में शामिल है।

सत्रीय कार्य से संबंधित निर्देश

इससे पहले कि आप किसी प्रश्न का उत्तर लिखें, निम्नलिखित निर्देशों को ध्यान से पढ़ें।

- 1) अपनी उत्तर पुस्तिका के पहले पृष्ठ पर सबसे ऊपर निम्नलिखित प्रारूप के आधार पर विवरण लिखें।

नामांकन संख्या :

नाम :

पता :

.....

.....

पाठ्यक्रम संख्या :

पाठ्यक्रम शीर्षक :

सत्रीय कार्य संख्या:

अध्ययन केंद्र :

दिनांक :

कार्य के सही और शीघ्र मूल्यांकन के लिए दिये गए प्रारूप का सही अनुसरण करें।

- 2) अपना उत्तर लिखने के लिए फुलस्कैप कागज़ का इस्तेमाल करें, जो बहुत पतला न हो।
- 3) प्रत्येक कागज़ पर बायें, ऊपर और नीचे 4 cm जगह छोड़ें।
- 4) आपके उत्तर स्पष्ट होने चाहिए।
- 5) प्रश्नों के हल लिखते समय, स्पष्ट संकेतों द्वारा बताएं कि किस प्रश्न का कौन सा भाग हल किया जा रहा है।
- 6) यह सत्रीय कार्य दिसम्बर 2017 तक वैध है। यदि आप इस सत्रीय कार्य में फेल हो जाते हैं या इसे दिसम्बर, 2017 तक जमा करने में असफल रहते हैं तो आप जनवरी, 2018 सत्र का सत्रीय कार्य प्राप्त करें और उसे उस सत्रीय कार्य में दिए गए आदेशों के अनुसार जमा करें।
- 7) परीक्षा फार्म भरने से पहले सत्रीय कार्य करना अनिवार्य है।
- 8) अपनी उत्तर पुस्तिका की एक प्रति अपने पास अवश्य रखें।

शुभकामनाओं के साथ।

सत्रीय कार्य

पाठ्यक्रम कोड : MTE - 14

सत्रीय कार्य कोड : MTE - 14/TMA/2017

अधिकतम अंक : 100

1. क) वास्तविक जगत से जुड़ी ऐसी दो समस्याएं बताइए जिनके बारे में आप यह समझते हैं कि केवल गणितीय निदर्शन से ही इन समस्याओं का हल प्राप्त किया जा सकता है। प्रत्येक समस्या के लिए चार अनिवार्य तथ्य भी बताइए। आप ऐसा क्यों समझते हैं कि इन समस्याओं के उपचार के लिए कोई अन्य वैज्ञानिक विकल्प नहीं है? (6)
- ख) अपने वर्गीकरण की पुष्टि करते हुए निम्नलिखित को रैखिक और अरैखिक निदर्शों में वर्गीकृत कीजिए
- i) लघुदोलन आयाम वाली सरल आवर्त गति
- ii) $\frac{dN}{dt} = aN (B - kN)$ द्वारा दिया गया जनसंख्या वृद्धि निदर्श जहां a, B, k अचर है
- iii) किसी समय t पर अचर त्वरण और प्रारंभिक वेग u से गतिमान एक कण के वेग v का समीकरण
- iv) निम्नलिखित द्वारा दी गई बाजार संतुलन कीमत के गति स्थायित्व की व्याख्या करने वाला समीकरण $p_t = [1 + k(a - A)p_{t-1} + k(b - B)]$, जहां a, b, A, B, k अचर है और p_t समय t पर कीमत है। (4)
2. क) अपने उत्तर की पुष्टि करते हुए निम्नलिखित परिघटनाओं को असंतत अथवा संतत में वर्गीकृत कीजिए।
- i) एक ट्यूमर पर विकिरण (radiation) उपचार का प्रभाव जबकि उपचार थोड़े समय के लिए परंतु नियमित अंतराल पर किया गया हो।
- ii) एक ट्यूमर पर रसायन औषधि के प्रभाव जबकि इन्हें एक दी हुई अवधि तक रोगी को दिया गया हो। (2)
- ख) द्रव्यमान m वाला एक कण केन्द्र से दूरी a से विरामावस्था से प्रारंभ करके आकर्षण-केन्द्र की ओर एक सरल रेखा में गतिमान होता है। केन्द्र से दूरी x पर इसका वेग $\sqrt{\frac{a^3 - x^3}{x^3}}$ के अनुसार परिवर्तित करता है। बल-नियम ज्ञात कीजिए। (3)
- ग) यदि एक ग्रह अपनी कक्षा में, जिसे वृत्ताकार माना गया है, अचानक रुक जाता हो, तो दिखाइए कि वह उस कालावधि में सूर्य में गिर जाएगा जो कि ग्रह के परिक्रमण काल का $\frac{\sqrt{2}}{8}$ गुना है। (5)

3. क) सरल आवर्त गति में गतिमान कण के वेग 8cm/sec और 6cm/sec होते हैं जबकि वह अपने गति-केन्द्र से क्रमशः 3cm और 4cm की दूरी पर होता है। गति का आवर्त काल और आयाम ज्ञात कीजिए। (4)

ख) निम्नलिखित समीकरण निकाय लीजिए।

$$\frac{dx}{dt} = y, \quad \frac{dy}{dt} = -k^2 \sin x$$

संगत रैखिक समीकरण-निकाय के क्रांतिक बिन्दु की प्रकृति ज्ञात कीजिए। (3)

- ग) लंबाई l वाली डोरी के एक छोर को एक नियत बिन्दु से और दूसरे छोर को द्रव्यमान m वाली एक छड़ी से जोड़ दिया गया है। यह छड़ी अचर वेग v से एक वृत्त में चक्कर काट रही है। विमीय विश्लेषण की सहायता से डोरी में लग रहे बल का समीकरण ज्ञात कीजिए। (3)

4. क) एक पेरशूटिसट जिसका वजन (वस्तुतः द्रव्यमान) 64 किग्रा है, जमीन से 5000 मीटर की ऊँचाई पर उड़ रहे हेलीकाप्टर से नीचे गिरती है। वह गुरुत्व के प्रभाव के अधीन धरती की ओर गिरती है। यहां यह मान लीजिए कि गुरुत्व बल अचर है। यहां पर भी मान लीजिए कि वायु-प्रतिरोध से उत्पन्न बल पेरशूटिसट के वेग के आनुपातिक है। आनुपातिकता स्थिरांक $k_1 = 16$ किग्रा/सेकेंड है, जबकि पेरशूट बंद है और $k_2 = 100$ किग्रा/सेकेंड जबकि पेरशूट खुला होता है। यदि हेलीकाप्टर से गिरने के 1 मिनट बाद भी पेरशूट नहीं खुलता है तो बताइए कि कितने सेकेंड बाद वह धरती पर गिर जाएगी? (8)

ख) एक प्रक्षेप्य को दो अलग-अलग प्रक्षेप कोणों α और β पर एक अचर चाल v से इस तरह नियत कर दिया गया कि इससे समान परास प्राप्त हो। दिखाइए कि $\cos ec\alpha = \sec \beta$ (2)

5. क) जल निकाय में फाइटोप्लैक्टन की एक विम संवृद्धि लीजिए। संवृद्धि की गतिकी का निर्धारण करने वाला निदर्श सूत्रित कीजिए, D इसका विसरण गुणांक है, r इसकी संवृद्धि दर है और R डूबने के कारण इसकी मृत्यु-दर है। यदि हम क्षेत्रफल $0 \leq x \leq 2$ लें, और फाइटोप्लैक्टन का प्रारंभिक सांद्रण 30 मोल/ cm^3 मान लें, तो किसी भी समय t पर $0 \leq x \leq 2$ में फाइटोप्लैक्टन का सांद्रण बंटन ज्ञात कीजिए। (7)

ख) जब एक विमान प्रस्थान से 10 km की ऊँचाई तक चढ़ता है तब उसके गुरुत्वीय आकर्षण में कितनी कमी आती है? (3)

6. क) एक दिए हुए वर्ष ($t = 0$) में पैदा हुए व्यक्तियों का एक समूह लीजिए और मान लीजिए इस समूह में से t वर्ष बाद जीवित रहने वाले व्यक्तियों की संख्या $n(t)$ है। मान लीजिए $x(t)$ इस समूह के उन सदस्यों की संख्या है, जिन्हें t वर्ष बाद तक चेचक नहीं हुआ है और इसलिए वे अभी तक सुग्राह्य बने हुए हैं। मान लीजिए β वह दर है जिससे सुग्राह्य व्यक्तियों को चेचक होता है और v वह दर है जिससे चेचक से पीड़ित व्यक्तियों की मृत्यु हो जाती है। अंत में मान लीजिए कि चेचक के अतिरिक्त अन्य कारणों से व्यक्ति की मृत्यु होने की दर $\mu(t)$ है। यदि dx/dt और dn/dt क्रमशः वह दर हो जिससे चेचक होने के कारण तथा अन्य कारणों से मृत्यु होने पर सुग्राह्य व्यक्तियों की संख्या और पूरी जनसंख्या में कमी आती हो, तो

i) dx/dt और dn/dt के समीकरण लिखकर ऊपर की समस्या का सूत्रण करें।

ii) $z = x/n$ लेकर यह दिखाइए कि z निम्नलिखित आदिमान समस्या को संतुष्ट करता है।

$$\frac{dz}{dt} = -\beta z(1 - vz), z(0) = 1$$

iii) किसी भी समय t पर $z(t)$ का मान ज्ञात कीजिए।

iv) बर्नोली ने यह आकलित किया था कि $v = \beta = \frac{1}{8}$ इन मानों की सहायता से 20 वर्ष की आयु वाले उन व्यक्तियों का समानुपात ज्ञात कीजिए जिन्हें चेचक नहीं हुआ था।

(10)

7. क) एक एकाधिकारी कीमत 'p' प्रति इकाई निर्धारित करता है और मांग की गई राशि 'q' निम्नलिखित संबंध द्वारा प्राप्त है $q = 17 - p$

मान लीजिए $\text{रू}0\ 9$ की एक नियत लागत है और $\text{रू}0\ 1$ प्रति इकाई की उपांतिक लागत है।

- एकाधिकारी का लाभ फलन लिखिए।
- अधिकतम लाभ के लिए उत्पादित इकाइयों की संख्या 'x' ज्ञात कीजिए। अधिकतम लाभ भी ज्ञात कीजिए।
- एक कार्यक्षम प्रवेशी एकाधिकारी के व्यापार में प्रवेश करता है। उसे यह विश्वास है कि एकाधिकारी 'x' इकाइयों का उत्पाद करता रहेगा। इस कार्यक्षम प्रवेशी का लाभ फलन लिखिए।
- प्रवेशी के अधिकतम लाभ के लिए उत्पादित इकाइयों की संख्या 'z' ज्ञात कीजिए।
- प्रवेशी का अधिकतम लाभ ज्ञात कीजिए और बताइए कि उसे व्यापार में प्रवेश करना चाहिए या नहीं।
- प्रवेशी के व्यापार में प्रवेश करने के बाद एकाधिकारी द्वारा अर्जित किया गया लाभ ज्ञात कीजिए।

(10)

8. क) निम्नलिखित त्रिघात कुल लागत फलन $C = 0.06q^3 - 0.8q^2 + 13q + 10$ लीजिए। यहां यह मान लीजिए कि q की कीमत प्रति एकक 15 है। वह उत्पादन ज्ञात कीजिए जिस पर अधिकतम लाभ प्राप्त होता है।

(3)

ख) प्रमुखता लागू करके नीचे दिए गए भुगतान आव्यूह से A और B की इष्टतम युक्तियां ज्ञात कीजिए।

खिलाडी B

u v

$$\text{खिलाडी A} \begin{matrix} x \\ y \\ z \end{matrix} \begin{bmatrix} 6(2) & 7(3) \\ 4(7) & 9(3) \\ 7(1) & 8(2) \end{bmatrix}$$

(3)

ग) मान लीजिए पिछला पूर्वानुमान 2090 था और पिछली अवधि में विशेष चर का वास्तविक मान 1985 था और इसका सबसे पुराना मान 1955 था। हाल ही में किए गए चार प्रेक्षणों पर आधारित गतिमान औसत तकनीक को लागू करके अगली अवधि के लिए किया गया नया पूर्वानुमान ज्ञात कीजिए।

(4)

9. क) साम्य बिंदुओं का पता लगाकर और प्रावस्था पथ आलेखित करके निम्नलिखित निकायों के प्रावस्था आरेखों की तुलना कीजिए :

i) $\dot{x} = y, \dot{y} = -x$

ii) $\dot{x} = xy, \dot{y} = -x^2$ (5)

ख) वह महामारी निदर्श लीजिए जो आदि प्रतिबंध $t = 0$ पर $x = n$ के अधीन निम्नलिखित अवकल समीकरण द्वारा नियंत्रित है :

$$\frac{dx}{dt} = -\beta x (n + 1 - x)$$

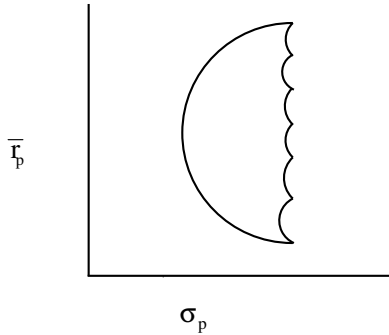
जहां $x(t)$ समय t पर सुग्राह्य व्यक्तियों की संख्या है, β संपर्क दर है। ऐसा मान लिया गया है कि जनसंख्या संवृत्त है और लोग समांग रूप से एक दूसरे के साथ मिल-जुलकर रह रहे हैं। मान लीजिए संपर्क दर 0.002 है और सुग्राह्य व्यक्तियों की संख्या प्रारंभ में 5000 है।

i) जनसंख्या का घनत्व ज्ञात कीजिए जब व्यक्तियों के नए रोगी बनने की दर अधिकतम हो।

ii) वह समय (सप्ताहों में) ज्ञात कीजिए जिसमें व्यक्तियों के नए रोगी बनने की दर अधिकतम हो।

iii) नए रोगी बनने की अधिकतम दर प्राप्त कीजिए। (5)

10. क) दिए हुए प्रतिभूति समुच्चय में उनकी सभी निवेश सूचियां प्रदेश की परिसीमा पर या उसके अंदर स्थित है जैसा कि चित्र 1 में दिखाया गया है।



चित्र 1

सुसंगत प्रदेश में वह निवेश सूची ज्ञात कीजिए जिसका अधिकतम प्रतिफल हो। इस प्रदेश में वह निवेश सूची भी ज्ञात कीजिए जिसमें न्यूनतम जोखिम हो। (3)

ख) सुसंगत प्रदेश के दक्ष सीमांत को चित्रित करने की विधि की व्याख्या कीजिए। (5)

ग) यदि n प्रतिभूतियों की सभी निवेशसूचियां प्राप्त हो तो एक उत्तम निवेश सूची का चयन करने के लिए निवेशक को कौन-सा निकस अपनाना चाहिए। (2)