

सत्रीय कार्य पुस्तिका

स्नातक उपाधि कार्यक्रम

विविक्त गणित

(1 जनवरी 2024 से 31 दिसम्बर 2024 तक वैध)



विज्ञान विद्यापीठ

इन्दिरा गांधी राष्ट्रीय मुक्त विश्वविद्यालय

मैदान गढ़ी, नई दिल्ली-110068

(जनवरी 2024 सत्र के लिए)

प्रिय विद्यार्थी,

हम उम्मीद करते हैं कि स्नातक उपाधि कार्यक्रम में अपनाई गयी मूल्यांकन पद्धति से आप भली-भांति परिचित हैं। आपके नामांकन के बाद हमने आपको ऐच्छिक पाठ्यक्रम की एक कार्यक्रम दर्शिका भेजी थी। उसमें सत्रीय कार्य से सम्बंधित जो भाग हैं उन्हें कृपया दुबारा पढ़ लें। जैसा कि आप जानते हैं कि निरन्तर मूल्यांकन के लिये 30% अंक निर्धारित किये गये हैं। इसके लिये आपको एक सत्रीय कार्य करना होगा। यह सत्रीय कार्य इस पुस्तिका में शामिल है।

सत्रीय कार्य से सम्बंधित निर्देश

इससे पहले कि आप किसी प्रश्न का उत्तर लिखें, निम्नलिखित निर्देशों को ध्यान से पढ़ें।

1) अपनी उत्तर पुस्तिका के पहले पृष्ठ पर सबसे ऊपर निम्नलिखित प्रारूप के आधार पर विवरण लिखें:

नामांकन संख्या :.....

नाम :.....

पता :.....

.....

.....

पाठ्यक्रम संख्या :

पाठ्यक्रम शीर्षक :

सत्रीय कार्य संख्या:

अध्ययन केन्द्र : दिनांक:

कार्य के सही और शीघ्र मूल्यांकन के लिए दिए गए प्रारूप का सही अनुसरण करें।

- 2) अपना उत्तर लिखने के लिए फुलस्कैप कागज का इस्तेमाल करें, जो ज्यादा पतला ना हो।
- 3) प्रत्येक कागज पर बांये, ऊपर और नीचे 4 सेमी. की जगह छोड़ें।
- 4) आपके उत्तर सुस्पष्ट होने चाहिए।
- 5) प्रश्नों के उत्तर लिखते समय, स्पष्ट संकेतों द्वारा बताएँ कि किस प्रश्न का कौनसा भाग हल किया जा रहा है।
- 6) यह सत्रीय कार्य दिसम्बर 2024 तक वैध है। यदि आप इस सत्रीय कार्य में फेल हो जाते हैं या इसे दिसम्बर 2024 तक जमा कराने में असफल रहते हैं तो आप 2025 सत्र का सत्रीय कार्य प्राप्त करें और उसे कार्यक्रम दर्शिका में दिए गए आदेशों के अनुसार जमा करें।
- 7) परीक्षा फार्म भरने से पहले सत्रीय कार्य करना अनिवार्य है।

अपनी उत्तर पुस्तिकाओं की प्रतिलिपि जरूर रखिए।

शुभकामनाओं के साथ।

सत्रीय कार्य

(पठ्यक्रम पढ़ने के बाद ही इसे हल करें।)

पाठ्यक्रम संख्या: एम.टी.ई.-13

सत्रीय कार्य संख्या: एम.टी.ई.-13/टी.एम.ए./2024

अधिकतम अंक: 100

1. बताइए कि निम्नलिखित कथन सत्य हैं अथवा असत्य। अपने उत्तर की लघु-व्याख्या या प्रति-उदाहरण द्वारा पुष्टि कीजिए। (2 × 10 = 20)

- (i) कथन " $x^2 + y^2 = 0 \Rightarrow x = 0$ और $y = 0$ " का प्रतिस्थितक " $x \neq 0$ और $y \neq 0 \Rightarrow x^2 + y^2 \neq 0$ " है।
- (ii) पुनरावृत्ति सम्बंध $\sqrt{a_n} = \sqrt{a_{n-1}} + 2\sqrt{a_{n-2}}$, ($n \geq 1$), $a_0 = a_1 = 1$ का हल $a_n = \frac{1}{9}[2^{n+1} + (-1)^n]^2$ है।
- (ii) 1 और 360 के बीच के पूर्णाकों, जो सापेक्षतः 360 से अभाज्य हैं, की संख्या 96 है। [ध्यान दें कि, 1 हर सकारात्मक पूर्णाक के सापेक्षतः अभाज्य है।]
- (iv) $(x + y + z)^{20}$ में $x^6 y^5 z^9$ का गुणांक $C(20,6) \cdot C(20,5) \cdot C(20,9)$ है।
- (v) यदि किसी ग्राफ के 6 शीर्ष और 10 कोरें हैं तो वह नियमित नहीं हो सकता।
- (vi) पिटर्सन ग्राफ द्विभाजित होता है।
- (vii) वृक्ष की प्रत्येक कोर एक सेतु होती है।
- (viii) C_5 की स्वातंत्र्य संख्या, अर्थात्, $\alpha(C_5)$, 2 है।
- (ix) व्यंजक $p(x, y, z) = (x' \wedge z)'$ का DNF $(x \vee y \vee z') \wedge (x \vee y' \vee z')$ है।
- (x) संख्या 8 का अधिकतम एक स्वसंयुग्मी विभाजन है।

2. (a) जनक फलन तकनीकी द्वारा समीकरण $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0$, $x_i \geq -4, \forall i$ के पूर्णाक हलों की संख्या ज्ञात कीजिए। (2)
- (b) मान लीजिए a_n ऐसे n -अंक द्वि-आधारी अनुक्रमों की संख्या है जिसके कोई भी दो क्रमागत अंक शून्य नहीं हैं। $a_n, n \geq 1$ के लिए पुनरावृत्ति सम्बंध ज्ञात कीजिए। (3)
- (c) पुनरावृत्ति सम्बंध $a_n = 2a_{n-1} + n(n-1), n \geq 1, a_0 = 1$ को जनक फलन तकनीकी द्वारा हल कीजिए। (3)
- (d) निम्नलिखित पैटर्न को देखिए:

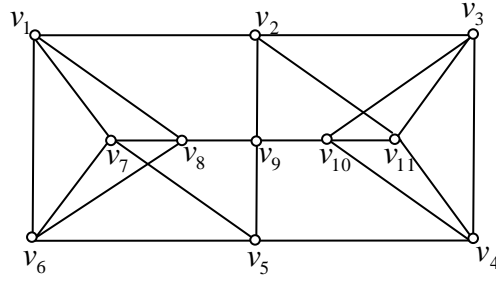
$$\begin{aligned} 1 &= 1^3 \\ 3 + 5 &= 2^3 \\ 7 + 9 + 11 &= 3^3 \end{aligned}$$

$$\boxed{} = 100^3$$

- (i) बॉक्स के अन्दर कितने '+' चिन्ह होने चाहिए?
- (ii) बॉक्स के अन्दर न्यूनतम और अधिकतम पूर्णाक क्या होंगे? (4)
- (e) बूलीय व्यंजक $(x_1' \vee x_2' \wedge x_3) \vee (x_2 \wedge x_3')$ का तर्क गेट बनाइए, जहाँ x_1, x_2, x_3 उस परिपथिकी के निवेश हैं। (3)

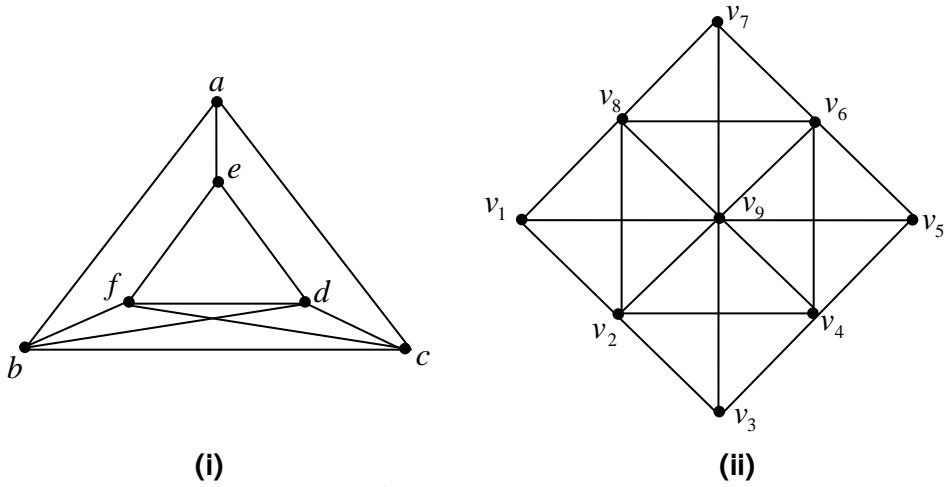
3. (a) पुनरावृत्ति संबंध $a_{n+1} = a_n + n \cdot 2^n, (n \geq 0), a_0 = 1$ को अंतःसर्पी योगफल विधि से हल कीजिए। (3)
- (b) अंतर्विरोध द्वारा सिद्ध कीजिए कि वर्ग आव्यूह का प्रतिलोम, अगर यह मौजूद है, अद्वितीय होता है। (2)
- (c) निम्नलिखित कथन की प्रत्यक्ष उपपत्ति दीजिए।
“विषम कोटि की प्रत्येक विषम सममित आव्यूह अव्युत्क्रमणीय होती है।” (2)
- (d) किन्हीं भी कथनों p, q और r के लिए, दिखाइए कि $\sim p \vee \sim q \rightarrow r \equiv p \wedge \sim (q \rightarrow r)$. (3)
4. (a) मान लीजिए p, q और r निम्न प्रकार परिभाषित कथन हैं :
 p : पाठ्यक्रम मजेदार है।
 q : प्रस्तुतिकरण स्फूर्तिदायक है।
 r : सामग्री अर्थपूर्ण है।
निम्नलिखित में से प्रत्येक को प्रतीकात्मक रूप में लिखिए।
(i) सामग्री अर्थपूर्ण है और प्रस्तुतिकरण स्फूर्तिदायक है, किंतु पाठ्यक्रम मजेदार नहीं है।
(ii) ऐसा नहीं है कि दोनों पाठ्यक्रम मजेदार है और, साथ ही, प्रस्तुतिकरण स्फूर्तिदायक नहीं है। (2)
- (b) पता लगाइए कि निम्नलिखित में से कौनसे वाक्य कथन हैं और कौनसे कथन नहीं हैं। अपने उत्तरों के कारण दीजिए। (3)
- (i) इस सत्रीय कार्य में कुल 8 प्रश्न हैं।
(ii) वाह, क्या खूबसूरत शाम है !
(iii) मुझे यकीन नहीं है कि मैं आपकी जितनी तेजी से दौड़ सकता हूँ या नहीं।
(iv) समुच्चय $\{2, -1, 2, -1, 2, -1, \dots\}$ अपरिबद्ध है।
(v) प्राकृतिक संख्याओं का समुच्चय \mathbb{N} पूर्णाकों के समुच्चय \mathbb{Z} के समतुल्य है।
(vi) राजस्थान भारतीय राज्यों और केंद्र शासित प्रदेशों के बीच क्षेत्रफल में सबसे बड़ा राज्य है।
- (c) गणितीय आगमन के सिद्धांत का प्रयोग करके, सिद्ध कीजिए कि तीन क्रमागत धन पूर्णाकों के घनों का योगफल 9 से विभाज्य है। (2)
- (d) बीजीय व्यंजक $X(x_1, x_2, x_3) = x_2 \vee (x_1 \wedge x_3)$ की CNF प्राप्त कीजिए। (3)
5. (a) एक कैंटाबिल शोरूम पेंट की 7 शैलियाँ प्रदान करता है। प्रत्येक शैली के लिए, 10 अलग संभव कमर आकार, 6 पेंट लंबाई और 4 रंग विकल्प हैं। शोरूम में पेंट के कितने विभिन्न प्रकार हो सकते हैं? (2)
- (b) समीकरण $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 12$ की ऋणेत्तर पूर्णाक हलों की संख्या का पता लगाइए। और इसके धन पूर्णाकों में कितने हल होंगे ? पुष्टि कीजिए। (3)
- (c) क्या प्रायिकता है कि 1 और 9999 के बीच के किसी पूर्णाक में ठीक एक 8 और एक 9 होगा? अपने उत्तर की पुष्टि कीजिए। (3)

- (d) जाँच कीजिए कि चित्र 1 में दिया गया ग्राफ आयलरीय है या नहीं। क्या यह नियमित है? अपने उत्तर की पुष्टि कीजिए। (2)



चित्र 1

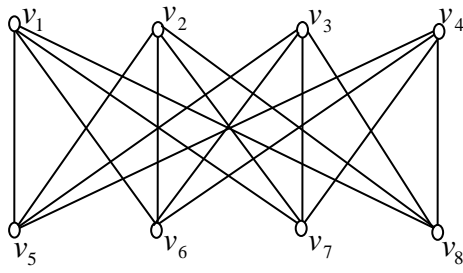
- (e) जाँच कीजिए कि चित्र 2 में दिए गये ग्राफ समतलीय है या नहीं। यदि हाँ, तो इनके समतल रेखाचित्र दीजिए, अन्यथा, $K_{3,3}$ या K_5 का उपविभाजन दीजिए। (5)



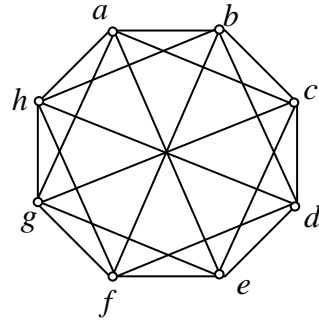
चित्र 2

6. (a) जनक फलनों की विधि का प्रयोग करके, पुनरावृत्ति संबंध $a_n = 2a_{n-1} + 2^n$, $n \geq 1$, $a_0 = 1$ को हल कीजिए। (3)
- (b) संचयविन्यास तर्क का प्रयोग करके, सिद्ध कीजिए कि
- $$(a + b + c)^n = \sum_{r+s+t=n} \binom{n}{r, s, t} a^r b^s c^t.$$
- $(x - y + 2z)^{100}$ में $x^{50}y^{12}z^{38}$ का गुणांक क्या है? (4)
- (c) मान लीजिए G एक n शीर्षों तथा $n - 1$ कोरों वाला अचक्रीय ग्राफ है। दिखाइए कि G संबद्ध है। (3)
- (d) आप पूर्ण द्विभाजित ग्राफ को कैसे परिभाषित करोगे? इसका एक उदाहरण दीजिए। क्या प्रत्येक पूर्ण द्विभाजित ग्राफ पूर्ण होता है? पुष्टि कीजिए। (2)
- (e) संचयविन्यास का प्रयोग करके, सिद्ध कीजिए कि $\binom{n}{k} \binom{k}{r} = \binom{n}{r} \binom{n-r}{k-r}$, जहाँ संकेत $\binom{n}{k}$ का प्रयोग, n वस्तुओं में से k वस्तुओं का एक उप-समुच्चय चयन करने के तरीकों की संख्या के लिए किया गया है। (3)

7. (a) चित्र 3 में दिए गये ग्राफों के कोटि अनुक्रम लिखिए।



(i)

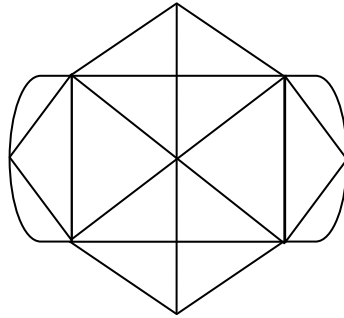


(ii)

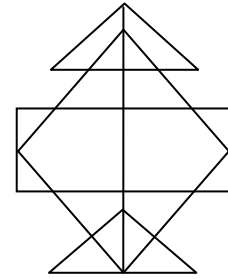
चित्र 3

क्या ये ग्राफ तुल्याकारी हैं ? अपने उत्तर की पुष्टि कीजिए । (4)

- (b) कागज पर से कलम उठाए बिना और किसी भी रेखा-खण्ड पर एक बार से अधिक जाए बिना निम्नलिखित चित्रों को खींचा जा सकता है या नहीं ? अपने उत्तर के समर्थन में कारण दीजिए। (2)



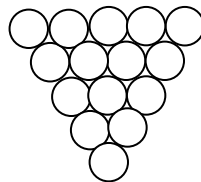
(i)



(ii)

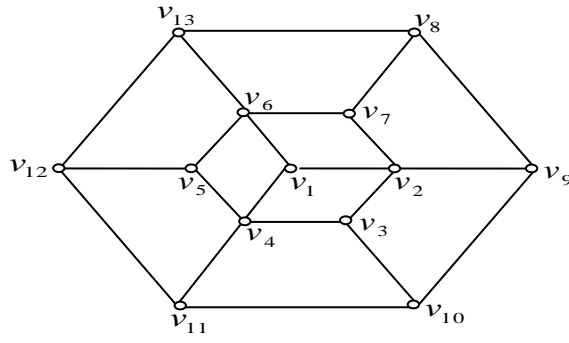
चित्र 4

- (c) नीचे दिए गए त्रिकोणीय व्यूह में 15 गेंदों रंग करने के लिए न्यूनतम कितने रंग आवश्यक हैं जबकि किन्हीं भी दो परस्पर स्पर्श करने वाली गेंदों को अलग-अलग रंग मिलता है? (3)



चित्र 5

- (d) सिद्ध कीजिए कि चित्र 6 में दिया गया ग्राफ अ-हैमिल्टोनीय है । (3)



चित्र 6

- (e) चित्र 3(ii) में दिए गए ग्राफ की कोर-वार्णिक संख्या क्या है? इसका एक कोर रंजन दीजिए । (3)