

सत्रीय कार्य पुस्तिका

स्नातक उपाधि कार्यक्रम

एम. टी. ई. – 07

उच्च स्तरीय कलन

(01 जनवरी, 2024 से 31 दिसंबर, 2024 तक वैध)

परीक्षा फार्म भरने से पहले सत्रीय कार्य जमा करना ज़रूरी है।



विज्ञान विद्यापीठ
इन्दिरा गांधी राष्ट्रीय मुक्त विश्वविद्यालय
मैदान गढ़ी, नई दिल्ली – 110 068

2024

प्रिय विद्यार्थी,

हम उम्मीद करते हैं कि स्नातक उपाधि कार्यक्रम में अपनाई गयी मूल्यांकन पद्धति से आप भली-भांति परिचित हैं। आपके नामांकन के बाद हमने आपको ऐच्छिक पाठ्यक्रम की एक कार्यक्रम दर्शिका भेजी थी। उसमें सत्रीय कार्य से संबंधित जो भाग हैं, उसे कृपया दुबारा पढ़ लें। जैसा कि आप जानते हैं निरन्तर मूल्यांकन के लिए 30% अंक निर्धारित किए गए हैं। इसके लिए आपको एक **सत्रीय कार्य** करना होगा। यह सत्रीय कार्य इस पुस्तिका में शामिल है।

सत्रीय कार्य से संबंधित निर्देश

इससे पहले कि आप किसी प्रश्न का उत्तर लिखें, निम्नलिखित निर्देशों को ध्यान से पढ़ें।

1) अपनी उत्तर पुस्तिका के पहले पृष्ठ पर सबसे ऊपर निम्नलिखित प्रारूप के आधार पर विवरण लिखें।

नामांकन संख्या :

नाम :

पता :

.....

.....

पाठ्यक्रम संख्या :

पाठ्यक्रम शीर्षक :

सत्रीय कार्य संख्या :

अध्ययन केंद्र : दिनांक :

.....

कार्य के सही और शीघ्र मूल्यांकन के लिए दिये गए प्रारूप का सही अनुसरण करें।

- 2) अपना उत्तर लिखने के लिए फुलस्कैप कागज़ का इस्तेमाल करें, जो बहुत पतला न हो।
- 3) प्रत्येक कागज़ पर बायें, ऊपर और नीचे 4 से.मी. जगह छोड़ें।
- 4) आपके उत्तर स्पष्ट होने चाहिए।
- 5) प्रश्नों के हल लिखते समय, स्पष्ट संकेतों द्वारा बताएं कि किस प्रश्न का कौन सा भाग हल किया जा रहा है।
- 6) यह सत्रीय कार्य 31 दिसम्बर, 2024 तक वैध है। यदि आप इस सत्रीय कार्य में फ़ेल हो जाते हैं या इसे 31 दिसम्बर, 2024 तक जमा करने में असफल रहते हैं, तो आप जनवरी, 2025 सत्र का सत्रीय कार्य प्राप्त करें और उसे उस सत्रीय कार्य में दिए गए आदेशों के अनुसार जमा करें।
- 7) परीक्षा फ़ार्म भरने से पहले सत्रीय कार्य करना ज़रूरी है।

अपनी उत्तर पुस्तिका की एक प्रति अपने पास अवश्य रखें।

शुभकामनाओं के साथ।

सत्रीय कार्य

पाठ्यक्रम कोड : एम. टी. ई. - 07

सत्रीय कार्य कोड : एम. टी. ई. - 07/ टी एम ए / 2024

अधिकतम अंक : 100

1. बताइए निम्नलिखित कथन सत्य है या असत्य। अपने उत्तर की पुष्टि कीजिए।

क) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{\sin^2 x} \right), \left(\frac{0}{0} \right)$ रूप का है।

ख) $f(x, y) = \frac{\sin\left(\frac{x^2 y}{x^3 + y^3}\right)}{\ln\left(\frac{x+y}{x}\right)}$ घात 2 का समघात फलन है।

ग) $f(x, y) = \frac{xy}{x^4 + y^4}$ का प्रांत \mathbf{R}^2 है।

घ) फलन $f(x, y) = (x^3 y + 1, x^2 + y^2)$, $(1, 2)$ पर स्थानिकत : व्युत्क्रमणीय है।

ड.) $f(x, y) = x^3 + y^3$, $[1, 2] \times [1, 3]$ पर समाकलनीय है। (10)

2. क) जाँच कीजिए, क्या $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{1/x}}{e^{1/x} + 1}$ का अस्तित्व है या नहीं। (3)

ख) यदि $f(x, y) = \begin{cases} x \sin\left(\frac{1}{y}\right) + y \sin\left(\frac{1}{x}\right), & xy \neq 0 \\ 0, & xy = 0 \end{cases}$.

तो दिखाएं कि f की पुनरावृत्त सीमाओं का अस्तित्व नहीं होता। मूल बिन्दु पर इस फलन की युगपत सीमा के अस्तित्व की जाँच कीजिए। (5)

ग) $f(x, y) = \frac{3x^2 y^2}{x^2 + y^4}$ के रूप में परिभाषित फलन f का प्रांत और परिसर ज्ञात कीजिए। (2)

3. क) यदि $f(x, y) = x^2 \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) - y^2 \tan^{-1}\left(\frac{x}{y}\right)$, $x \neq 0, y \neq 0$.

$= 0, \quad x = 0 = y$

सिद्ध कीजिए कि $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$. (5)

ख) यदि $z = e^{xy^2}$, $x = t \cos t$, $y = t \sin t$, तब $t = \frac{\pi}{2}$ पर $\frac{dz}{dt}$ परिकलित कीजिए। (3)

ग) मान लीजिए $x = e_1 + e_2 - 2e_3$, $y = 2e_1 - e_2 + e_3$ जहाँ e_1, e_2, e_3 एकक सदिश है। $|x + 2y|$ और $|x + y|$ ज्ञात कीजिए। (2)

4. क) जाँच कीजिए कि $f : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$ द्वारा परिभाषित फलन $f(x, y) = 2x^4 - 3x^2 y + y^2$ का $(0, 0)$ पर चरम मान होता है। (4)

- ख) जाँच कीजिए कि $x=3$ के प्रतिवेश में $f(x,y)=0$ द्वारा परिभाषित एक ऐसे संतततः अवकलनीय फलन f का अस्तित्व होता है जिसके लिए $g(3)=\frac{1}{3}$. यदि अस्तित्व होता है तो $g'(3)$ ज्ञात कीजिए। (3)
- ग) दिखाइए कि फलन $f(x,y)=\ln x - \ln y$ और $g(x,y)=\frac{x^2+2y^2}{2xy}$ फलनिकतः आश्रित है। (3)
5. क) $x^2+y^2=1, z=0$ और $z=1$ द्वारा परिबद्ध बेलन पर $f(x,y,z)=x+z-3$ के समाकल का मूल्यांकन कीजिए। (3)
- ख) समाकल $\int_0^{\sqrt{3}} \int_y^{\sqrt{4-y^2}} \frac{dx dy}{4+x^2+y^2}$ को ध्रुवीय निदेशांक में परिवर्तित करके उसका मूल्यांकन कीजिए। (4)
- ग) फलन $f(x,y)=\frac{x+y}{x-y}, x \neq y$ के दो स्तर वक्र ज्ञात कीजिए और उनका स्थूल चित्र बनाइए। (3)
6. क) यदि संभव हो तो ऐसा फलन f ज्ञात कीजिए जिसके लिए $F=(4x^3+9x^2y^2, 6x^3y+6y^5)=\nabla f$. (5)
- ख) $\left(1, \frac{\pi}{2}\right)$ के सापेक्ष फलन $f(x,y)=xy^2+\cos xy$ का द्वितीय टेलर प्रसार ज्ञात कीजिए। (3)
- ग) a, b, c के ऐसे मान ज्ञात कीजिए जिसके लिए $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{ae^x - b \cos x + ce^{-x}}{x \sin x} = \frac{3}{2}$. (2)
7. क) फलन $f(x,y)=y^4+xy^2+x^2$ के स्तब्ध बिंदु और स्थानीय चरम मान ज्ञात कीजिए, जहाँ $(x,y) \in \mathbf{R}^2$. (4)
- ख) दिखाइए कि रेखा समाकल $\int_{(-1,2)}^{(3,1)} (y^2+2xy) dx + (x^2+2xy) dy$ पथ-स्वतंत्र है और उसका मूल्यांकन कीजिए। (4)
- ग) समतलों $x=0, y=2$ और पृष्ठ $z=x^3+e^{yx}$ के प्रतिच्छेद वक्रों के बिन्दु $(0,2,1)$ पर स्पर्श रेखा की प्रवणता ज्ञात कीजिए। (2)
8. क) फलन $f(x,y)=y^4+xy^2+x^2$ के स्तब्ध बिंदु और स्थानीय चरम मान ज्ञात कीजिए, जहाँ $(x,y) \in \mathbf{R}^2$. (5)
- ख) जाँच कीजिए कि फलन
- $$f(x,y) = \begin{cases} \frac{6xy}{\sqrt{x^2+y^2}}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$
- मूल बिंदु पर संतत है या नहीं। (5)

9. क) घनाभ $[0,1] \times [2,4] \times [1,3]$ के रूप वाली वस्तु का द्रव्यमान ज्ञात कीजिए। घनाभ पर किसी भी बिन्दु (x, y, z) पर घनत्व $\delta(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ द्वारा दिया गया है। (5)
- ख) दीर्घवृत्त $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ पर ऐसा बिन्दु ज्ञात कीजिए जो मूल बिंदु के निकटतम हो। (3)
- ग) फलनों $f(t) = 4t$, $t \in \mathbf{R}$, $g(x, y) = x + y$, $x, y \in \mathbf{R}$ के लिए $g \circ f$ ज्ञात कीजिए। (2)
10. क) मान लीजिए फलन $f : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$ निम्नलिखित रूप में परिभाषित है

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy(x^2 - y^2)}{x^2 + y^2} & \text{यदि } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & \text{यदि } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

दिखाइए कि

i) $f_x(0, y) = y$, for all y

ii) $f_x(x, 0) = x$, for all x .

इस तरह, सत्यापित कीजिए कि $f_{xy}(0, 0) \neq f_{yx}(0, 0)$. (5)

ख) मान लीजिए $f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2y}{x^4 + y^2} & \text{यदि } x^4 + y^2 \neq 0 \\ 0, & \text{यदि } x = y = 0 \end{cases}$

जाँच कीजिए कि $\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} f(x, y)$ का अस्तित्व होता है या नहीं। (3)

ग) सिद्ध कीजिए कि $\lim_{x \rightarrow 0} x \sin \frac{2}{x} = 0$. (2)