

MTE-09

सत्रीय कार्य पुस्तिका

स्नातक उपाधि कार्यक्रम

एम. टी. ई. – 09

वास्तविक विश्लेषण

1 जनवरी, 2023 से 31 दिसंबर, 2023 तक वैध

परीक्षा फ़ार्म भरने से पहले सत्रीय कार्य जमा करना ज़रूरी है।



विज्ञान विद्यापीठ
इन्दिरा गांधी राष्ट्रीय मुक्त विश्वविद्यालय
मैदान गढ़ी, नई दिल्ली – 110 068

2023

प्रिय विद्यार्थी,

हम उम्मीद करते हैं कि स्नातक उपाधि कार्यक्रम में अपनाई गई मूल्यांकन पद्धति से आप भली-भांति परिचित हैं। आपके नामांकन के बाद हमने आपको ऐच्छिक पाठ्यक्रम की एक कार्यक्रम दर्शिका भेजी थी। उसमें सत्रीय कार्य से संबंधित जो भाग है, उसे कृपया दुबारा पढ़ लें। जैसा कि आप जानते हैं निरन्तर मूल्यांकन के लिए 30% अंक निर्धारित किए गए हैं। इसके लिए आपको एक **सत्रीय कार्य** करना होगा। यह सत्रीय कार्य इस पुस्तिका में शामिल है।

सत्रीय कार्य से संबंधित निर्देश

इससे पहले कि आप किसी प्रश्न का उत्तर लिखें, निम्नलिखित निर्देशों को ध्यान से पढ़ें।

1) अपनी उत्तर पुस्तिका के पहले पृष्ठ पर सबसे ऊपर निम्नलिखित प्रारूप के आधार पर विवरण लिखें।

नामांकन संख्या :

नाम :

पता :

.....

.....

पाठ्यक्रम संख्या :

पाठ्यक्रम शीर्षक :

सत्रीय कार्य संख्या :

अध्ययन केंद्र : दिनांक :

.....

कार्य के सही और शीघ्र मूल्यांकन के लिए दिये गए प्रारूप का सही अनुसरण करें।

- 2) अपना उत्तर लिखने के लिए फुलस्कैप कागज़ का इस्तेमाल करें, जो बहुत पतला न हो।
- 3) प्रत्येक कागज़ पर बायें, ऊपर और नीचे 4 से.मी. जगह छोड़ें।
- 4) आपके उत्तर स्पष्ट होने चाहिए।
- 5) प्रश्नों के हल लिखते समय, स्पष्ट संकेतों द्वारा बताएं कि किस प्रश्न का कौन सा भाग हल किया जा रहा है।
- 6) यह सत्रीय कार्य 31 दिसम्बर, 2023 तक वैध है। यदि आप इस सत्रीय कार्य में फ़ेल हो जाते हैं या इसे 31 दिसम्बर, 2023 तक जमा करने में असफल रहते हैं, तो आप जनवरी, 2024 सत्र का सत्रीय कार्य प्राप्त करें और उसे उस सत्रीय कार्य में दिए गए आदेशों के अनुसार जमा करें।
- 7) परीक्षा फ़ार्म भरने से पहले सत्रीय कार्य करना ज़रूरी है।

अपनी उत्तर पुस्तिका की एक प्रति अपने पास अवश्य रखें।

शुभकामनाओं के साथ।

सत्रीय कार्य

पाठ्यक्रम कोड : एम. टी. ई. - 09

सत्रीय कार्य कोड : एम. टी. ई. - 09/टी एम ए/2023

अधिकतम अंक : 100

1. बताइए निम्नलिखित कथन सत्य है अथवा असत्य? अपने उत्तरों के कारण बताइए।

क) $\frac{1}{2}$ अंतराल $]-2.5, 1.5[$ की सीमा है।

ख) $[a, b]$ पर अवकलनीय प्रत्येक फलन $[a, b]$ पर परिबद्ध है।

ग) $f(x) = \left| x - \frac{5}{2} \right|$, $x \in \mathbf{R}$ पर परिभाषित फलन f के लिए $x = \frac{5}{2}$ पर एक स्थानिक उच्चतम होता है।

घ) यदि $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$, तब श्रेणी $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ अभिसारी है।

ड.) यह ज़रूरी नहीं कि प्रत्येक समाकलनीय फलन अवकलनीय हो। (10)

2. क) यदि $a \in \mathbf{R}$ ऐसा है जिसके लिए $0 \leq a \leq \varepsilon \forall \varepsilon > 0$, तब दिखाइए कि $a = 0$. (2)

ख) गणितीय आगमन का प्रयोग करके, दिखाइए कि

$$\frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1} . \quad (3)$$

ग) दिखाइए कि विवृत समुच्चयों का गणनीय संग्रह का सम्मिलन एक विवृत समुच्चय है। (3)

घ) जाँच कीजिए कि पूर्णाकों का समुच्चय संहत होता है या नहीं। (2)

3. क) जाँच कीजिए कि निम्नलिखित फलन $x = 0$ पर संतत हैं या नहीं। उन बिन्दुओं पर असांतत्य का अस्तित्व हो, तो उसका स्वरूप भी ज्ञात कीजिए।

$$(i) f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{2-x} - \sqrt{2+x}}{x} & , x \neq 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & , x = 0 \end{cases}$$

$$(ii) f(x) = \begin{cases} x^2 + \frac{1}{3} & , x \leq 0 \\ -(x^3 + \frac{1}{3}) & , x > 0 \end{cases} \quad (4)$$

ख) निम्नलिखित सीमा का यदि अस्तित्व है तो इसका मूल्यांकन कीजिए :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{4x^3}{\tan^3 x + \tan x - x} . \quad (2)$$

ग) दिखाइए कि $f(x) = \frac{1}{(x+2)^3}$, $\forall x \in]-2, 2[$ द्वारा दिया गया फलन f संतत है लेकिन $]-2, 2[$ में परिबद्ध नहीं है। (4)

4. क) निम्नलिखित अनुक्रमों के लिए ऐसे दो उपअनुक्रम निकालिए जो अभिसारी है

(i) $a_n = n[1 + (-1)^n]$.

(ii) $a_n = \sin\left(\frac{n\pi}{3}\right)$. (3)

ख) जाँच कीजिए कि निम्नलिखित अनुक्रम काँशी है या नहीं

(i) $s_n = 1 + 2 + 3 + \dots + n$

(ii) $s_n = \frac{4n^3 + 3n}{3n^3 + n^2}$. (3)

ग) सीमा बिन्दुओं की परिमित संख्या वाले किसी एक अनंत समुच्चय का, एक पुष्टि सहित, उदाहरण दीजिए। (2)

घ) $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{2x^2 + 3x - 2} - \sqrt{2x^2 - 3x + 2})$ का मूल्यांकन कीजिए। (2)

5. क) अभिसरण के लिए निम्नलिखित श्रेणी की परीक्षण कीजिए।

(i) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{7^n}{(3n+1)!}$

(ii) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{\log n}}$. (4)

ख) निम्नलिखित श्रेणी के निरपेक्ष और सप्रतिबंध अभिसरण का परीक्षण कीजिए।

(i) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{5}{3n+1}$

(ii) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^3}$ (4)

ग) दिखाइए कि समुच्चय $B = \{x \mid x^2 > 2\}$ अस्विक्त है और नीचे परिबद्ध है। क्या यह ऊपर परिबद्ध है, पुष्टि कीजिए। (2)

6. क) दिखाइए कि \mathbf{R} पर

$$f(x) = \begin{cases} 3x^2 \cos \frac{1}{2x}, & \text{जब } x \neq 0 \\ 0, & \text{जब } x = 0 \end{cases}$$

द्वारा परिभाषित फलन f , \mathbf{R} पर अवकलनीय है लेकिन f' , $x=0$ पर संतत नहीं है। (3)

ख) अंतराल $[0, 2]$ पर

$$f(x) = 3x^4 - 4x^3 + 6x^2 + 36x - 5$$

द्वारा परिभाषित फलन f के न्यूनतम और महत्तम मान ज्ञात कीजिए। (4)

ग) टेलर प्रमेय का प्रयोग करके, सिद्ध कीजिए कि

$$\cos x \leq 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} \quad \forall x \in \mathbf{R}. \quad (3)$$

7. क) अभिसरण के लिए निम्नलिखित श्रेणी की जाँच कीजिए

$$\frac{2.4}{3.5} + \frac{2.4.6}{3.5.7}x + \frac{2.4.6.8}{3.5.7.9}x^2 + \dots (x > 0). \quad (4)$$

ख) दिखाइए कि

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{जब } x \text{ परिमेय हो} \\ 2 & \text{जब } x \text{ अपरिमेय हो} \end{cases}$$

द्वारा परिभाषित फलन $f : [0, 1] \rightarrow \mathbf{R}$ रीमान समाकलनीय नहीं है। (3)

ग) योगफल $\frac{1}{n} \left[\sin \frac{\pi}{n} + \sin \frac{2\pi}{n} + \dots + \sin \frac{2n\pi}{n} \right]$ की सीमा ज्ञात कीजिए जो कि $n \rightarrow \infty$ हो (3)

8. क) अंतराल $[-1, 1]$ पर $f(x) = |x|$ द्वारा परिभाषित फलन के शीमान समाकल परिकलित कीजिए। (4)

ख) मान लीजिए $f, [a, b]$ पर गैर-ऋणात्मक संतत फलन है और $\int_a^b f(x) dx = 0$ । सिद्ध कीजिए कि

$$f(x) = 0 \forall x \in [a, b]. \quad (4)$$

ग) जाँच कीजिए कि फलन $f(x) = [x] + e^x$, $[0, 3]$ पर रीमान समाकलनीय है या नहीं। (2)

9. क) $f(x) = 3x$ और $g(x) = 5x$ द्वारा $[1, 2]$ पर परिभाषित फलनों के लिए समाकलनीयता के द्वितीय माध्य मान प्रमेय को सत्यापित कीजिए। (4)

ख) दिखाइए कि अनुक्रम $f_n(x) = \frac{x}{1+2nx^2}$, $x \in [1, \infty[$ में एकसमानतः अभिसारी है या नहीं। (3)

ग) सत्यापित कीजिए कि, फलन $f(x) = \cos x$, $x \in [0, \pi]$ के प्रतिलोम फलन के प्रांत के बिन्दु y_0 पर, अवकलज ज्ञात करने के लिए प्रतिलोम फलन प्रमेय का प्रयोग कर सकते हैं। अतएव, y_0 पर प्रतिलोम फलन के अवकलज ज्ञात कीजिए। (3)

10. क) $f(x) = \frac{7}{2} - 2x$, $\forall x \in [1, 3]$ और निम्न से परिभाषित फलन f के ऊपरि और निम्न रिमान समाकल ज्ञात कीजिए। क्या f , अंतराल $[1, 3]$ पर समाकलनीय है? अपने उत्तर की पुष्टि कीजिए। (5)

ख) जाँच कीजिए कि फलन $f(x) = \sin \frac{1}{x}$ ($x \neq 0$) अंतराल $]0, 2[$ एकसमानतः संतत है। क्या f संतत है? अपने उत्तर की पुष्टि कीजिए। (3)

ग) $a \in \mathbf{R}$ का मान ज्ञात कीजिए जिसके लिए

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(3x+4)(x-1)(2x+1)}{ax^3 + x - 4} \text{ का अस्तित्व है।} \quad (2)$$