

MTE-08

सत्रीय कार्यक्रम पुस्तिका

स्नातक उपाधि कार्यक्रम
(बी.एससी./बी.ए./बी.कॉम.)

अवकल समीकरण

(1 जनवरी, 2023 से 31 दिसम्बर, 2023)

सत्रांत परीक्षा फॉर्म भरने से पहले सत्रीय कार्य जमा करना अनिवार्य है।

प्रिय विद्यार्थी,

हम उम्मीद करते हैं कि स्नातक उपाधि कार्यक्रम में अपनाई गयी मूल्यांकन पद्धति से आप भली-भांति परिचित हैं। आपके नामांकन के बाद हमने आपको ऐच्छिक पाठ्यक्रम की एक कार्यक्रम दर्शिका भेजी थी। उसमें सत्रीय कार्य से संबंधित जो भाग है, उसे कृपया दुबारा पढ़ लें। जैसा कि आप जानते हैं निरन्तर मूल्यांकन के लिए 30% अंक निर्धारित किए गए हैं। इसके लिए आपको एक सत्रीय कार्य करना होगा। यह सत्रीय कार्य इस पुस्तिका में शामिल है।

सत्रीय कार्य से संबंधित निर्देश

इससे पहले कि आप किसी प्रश्न का उत्तर लिखें, निम्नलिखित निर्देशों को ध्यान से पढ़ें।

1) अपनी उत्तर पुस्तिका के पहले पृष्ठ पर सबसे ऊपर निम्नलिखित प्रारूप के आधार पर विवरण लिखें।

नामांकन संख्या :

नाम :

पता :

.....

.....

पाठ्यक्रम संख्या :

पाठ्यक्रम शीर्षक :

सत्रीय कार्य संख्या :

अध्ययन केंद्र : दिनांक :

.....

कार्य के सही और शीघ्र मूल्यांकन के लिए दिये गए प्रारूप का सही अनुसरण करें।

- 2) अपना उत्तर लिखने के लिए फुलस्कैप कागज़ का इस्तेमाल करें, जो बहुत पतला न हो।
- 3) प्रत्येक कागज़ पर बायें, ऊपर और नीचे 4 से.मी. जगह छोड़ें।
- 4) आपके उत्तर स्पष्ट होने चाहिए।
- 5) प्रश्नों के हल लिखते समय, स्पष्ट संकेतों द्वारा बताएं कि किस प्रश्न का कौन सा भाग हल किया जा रहा है।
- 6) यह सत्रीय कार्य 31 दिसम्बर, 2023 तक वैध है। यदि आप इस सत्रीय कार्य में फ़ेल हो जाते हैं या इसे 31 दिसम्बर, 2023 तक जमा करने में असफल रहते हैं, तो आप जनवरी, 2019 सत्र का सत्रीय कार्य प्राप्त करें और उसे उस सत्रीय कार्य में दिए गए आदेशों के अनुसार जमा करें।
- 7) परीक्षा फ़ार्म भरने से पहले सत्रीय कार्य करना ज़रूरी है।

अपनी उत्तर पुस्तिका की एक प्रति अपने पास अवश्य रखें।

शुभकामनाओं के साथ।

सत्रीय कार्य

(पूरा खंड पढ़ने के बाद ही इसे कीजिए।)

पाठ्यक्रम कोड: MTE-08

सत्रीय कार्य कोड: MTE-08/TMA/2023

अधिकतम अंक : 100

1. बताइए निम्नलिखित कथन सत्य हैं या असत्य प्रत्युदाहरण अथवा संक्षिप्त उपपत्ति की सहायता से अपने उत्तर की पुष्टि कीजिए : (5×2=10)

a) यदि $\left(\frac{1}{y^4}\right)$ अवकल समीकरण $(2xy^4e^y + 2xy^3 + y)dx + (x^2y^2e^y - x^2y^2 - 3x)dy = 0$,

का समाकलन गुणक है तो इसका हल $x^2e^y + \frac{x^2}{y} + \frac{x}{y^3} = c$, होगा जहाँ c अचर है।

- b) प्रतिबंधों $y(0) = y'(0) = y''(0) = 0$, और $y'''(0) = 1$, को संतुष्ट करता हुआ अवकल समीकरण

$$\frac{d^4y}{dx^4} + \frac{d^2y}{dx^2} = 0$$

का हल $y = x - \sin x$ है।

- c) समघात फ़ैफियन अवकल समीकरण $z^3(x^2y - y^2z)dx + x^3(y^2z - z^2x)dy + y^3(z^2x - x^2y)dz = 0$ समाकलनीय है।

- d) समीकरण $\sin(x + 2y)p + \cos(2x - 3y)q = z - \frac{1}{z}$ रैखिक है।

- e) समीकरण $(1 - y)u_{xx} + 2(1 - x)u_{xy} + (1 + y)u_{yy} + yu_x + xu_y = 0$ वृत्त $(x - 1)^2 + y^2 = 1$ के बाहर अतिपरवलयिक है।

2. a) बर्फ़ के पिघलने की दर उस समय प्राप्त बर्फ़ की मात्रा के समानुपाती है। यदि बर्फ़ की आधि मात्रा 30 मिनट में पिघल जाती हो तो दो घंटे बाद बची हुई बर्फ़ की मात्रा ज्ञात कीजिए। (4)

- b) हल कीजिए: $(D^2 - 6D + 13)y = 8e^{3x} \sin 4x + 3^x$. (4)

- c) आदि मान समस्या $\frac{dy}{dx} = \frac{2}{x}y$, $y(0) = 0$ के दो हल $y = 0$ और $y = x^2$ हैं। क्या इस परिणाम से अस्तित्व तथा अद्वितीयता प्रमेय का खंडन होता है? अपने उत्तर के कारण बताइए। (2)

3. a) सिद्ध कीजिए कि अवकल समीकरण $\frac{dy}{dx} - \frac{dx}{dy} = \frac{x}{y} - \frac{y}{x}$ के हल $xy = c_1$ और $(x^2 - y^2) = c_2$ द्वारा प्राप्त हैं जहाँ c_1 और c_2 अचर हैं। (4)

- b) परतंत्र चर में परिवर्तन करके समीकरण $\frac{d^2y}{dx^2} - 4x \frac{dy}{dx} + (4x^2 - 1)y = -3e^{x^2} \sin 2x$ को प्रसामान्य रूप में परिवर्तित कीजिए और उसका हल प्राप्त कीजिए। (6)
4. a) समीकरण $(3z^2 - 2yz - 2y^2)p + x(2y + z)q = x(y - 3z)$ का व्यापक समाकल ज्ञात कीजिए। (4)
- b) आंशिक अवकल समीकरण $z = px + q + \frac{pq}{y}$ का पूर्ण समाकल ज्ञात कीजिए। (6)
5. a) प्रतिबंधों $u = 0$, जबकि $x = 0$ और $x = \pi$,
 $\frac{\partial u}{\partial t} = 0$, जबकि $t = 0$; $u(x, 0) = x$, $0 < x < \pi$ के अधीन तरंग समीकरण $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ का हल प्राप्त कीजिए। (6)
- b) हल कीजिए :
 $\frac{dy}{dx} + \left(\frac{x}{1-x^2} \right) y = x\sqrt{y}$, $y(0) = 1$. (4)
6. a) प्राचल विचरण विधि से समीकरण $\frac{d^2y}{dx^2} - y = \frac{2}{1+e^x}$ का हल प्राप्त कीजिए। (4)
- b) $f(x, y, z, p, q) = 0$ को $F\left(x, y, z, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z}\right) = 0$ में रूपांतरित करने का लाभ क्या है? समीकरण $z + 2u_3 - (u_1 + u_2)^2 = 0$, के सहायक समीकरण लिखिए। (2)
- c) हल कीजिए: $(x^2D^2 - y^2D^2 + xD - yD)z = 6xy^2$. (4)
7. एक वर्गाकार प्लेट $0 \leq x \leq 10, 0 \leq y \leq 10$, के कोर $x = 0, x = 10, y = 0$ को शून्य तापमान पर रखा गया है जबकि कोर $y = 10$ पर तापमान $20x - x^2$ द्वारा दिया गया है। दिखाइए कि लाप्लास समीकरण संतुष्ट करने वाला तापमान $\theta(x, y)$ यह है

$$\theta(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} F_m \sin \frac{m\pi x}{10} \left(e^{\frac{m\pi y}{10}} - e^{-\frac{m\pi y}{10}} \right),$$
जहाँ

$$F_m = \frac{1}{m\pi \sinh(m\pi)} \left[200(-1)^{m+1} + \frac{80}{m^2\pi^2} (1 - (-1)^m) \right].$$
 (10)
8. a) समीकरण $(x^2 - yz)p + (y^2 - zx)q = z^2 - xy$ का समाकल पृष्ठ मालूम कीजिए जो रेखा $x = 1, y = 0$ से होकर जाता है। (5)
- b) चार्पिट विधि से समीकरण $(p + q)(px + qy) - 1 = 0$ का पूर्ण समाकल ज्ञात कीजिए। (5)
9. a) समीकरण $\frac{dx}{x^2 + y^2} = \frac{dy}{2xy} = \frac{dz}{(x + y)z}$ के समाकल वक्र ज्ञात कीजिए। (5)

b) हल कीजिए: $(D^2 - D'^2 - 3D + 3D') z = e^{x+2y}$. (5)

10. a) प्रतीकात्मक संकारक विधि से समीकरण $(x^2 D^2 - xD + 2)y = x \log x$ का व्यापक हल प्राप्त कीजिए। (5)

b) स्वतंत्र चर को परिवर्तित करके निम्न अवकल समीकरण

$$x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} - \frac{dy}{dx} - 4x^3 y = 8x^3 \sin x^2, x > 0 \text{ को हल कीजिए।} \quad (5)$$