MTE-06

सत्रीय कार्य पुस्तिका

स्नातक उपाधि कार्यक्रम

एम. टी. ई. – 06

अमूर्त बीजगणित

(01 जनवरी, 2023 से 31 दिसंबर, 2023 तक वैध)

विज्ञान विद्यापीठ
इन्दिरा गांधी राष्ट्रीय मुक्त विश्वविद्यालय
मैदान गढ़ी, नई दिल्ली – 110 068

2023

प्रिय विद्यार्थी,

हम उम्मीद करते हैं कि स्नातक उपाधि कार्यक्रम में अपनाई गयी मूल्यांकन पद्धति से आप भली-भांति परिचित हैं। आपके नामांकन के बाद हमने आपको ऐच्छिक पाठ्यक्रम की एक कार्यक्रम दर्षिका भेजी थी। उसमें सत्रीय कार्य से संबंधित जो भाग है, उसे कृपया दुबारा पढ़ लें। जैसा कि आप जानते हैं निरन्तर मूल्यांकन के लिए 30% अंक निर्धारित किए गए हैं। इसके लिए आपको एक **सत्रीय कार्य** करना होगा। यह सत्रीय कार्य इस पुस्तिका में शामिल है।

सत्रीय कार्य से संबंधित निर्देश

इससे पहले कि आप किसी प्रश्न का उत्तर लिखें, निम्नलिखित निर्देशों को ध्यान से पढ़ें।

1) अपनी उत्तर पुस्तिका के पहले पृष्ठ पर सबसे ऊपर निम्नलिखित प्रारूप के आधार पर विवरण लिखें।

नामांकन संख्या : ……………………………..

नाम : ……………………………..

पता : ……………………………..

……………………………..

……………………………..

पाठ्यक्रम संख्या : ………………………………

पाठ्यक्रम शीर्षक : ………………………………

सत्रीय कार्य संख्या : ………………………………

अध्ययन केंद्र : ……………………………… दिनांक : ……………………........

कार्य के सही और शीघ्र मूल्यांकन के लिए दिये गए प्रारूप का सही अनुसरण करें।

2) अपना उत्तर लिखने के लिए फुलस्कैप कागज़ का इस्तेमाल करें, जो बहुत पतला न हो।

3) प्रत्येक कागज़ पर बायें, ऊपर और नीचे 4 से.मी. जगह छोड़ें।

4) आपके उत्तर स्पष्ट होने चाहिए।

5) प्रश्नों के हल लिखते समय, स्पष्ट संकेतों द्वारा बताएं कि किस प्रश्न का कौन सा भाग हल किया जा रहा है।

6) यह सत्रीय कार्य 31 दिसम्बर, 2023 तक वैध है। यदि आप इस सत्रीय कार्य में फ़ेल हो जाते हैं या इसे 31 दिसम्बर, 2023 तक जमा करने में असफ़ल रहते हैं, तो आप जनवरी, 2024 सत्र का सत्रीय कार्य प्राप्त करें और उसे उस सत्रीय कार्य में दिए गए आदेशों के अनुसार जमा करें।

7) परीक्षा फ़ार्म भरने से पहले सत्रीय कार्य करना ज़रूरी है।

अपनी उत्तर पुस्तिका की एक प्रति अपने पास अवश्य रखें।

शुभकामानाओं के साथ।

सत्रीय कार्य
(इसे चारों खंडों को पढ़ने के बाद कीजिए।)

पाठ्यक्रम कोड: एम टी ई – 06
सत्रीय कार्य कोड : एम टी ई - 6/टी एम ए /2023
अधिकतम अंक : 100

1ण निम्नलिखित में से कौन-से कथन सत्य हैं? अपने उत्तरों की पुष्टि कीजिए। (इसका अर्थ है कि यदि आप सोचते हैं कि कोई कथन असत्य है, तो एक संक्षिप्त उपपत्ति या एक उदाहरण ऐसा दीजिए जो उसे असत्य दर्शाए। यदि यह एक सत्य कथन है, तो ऐसा कहने के लिए एक संक्षिप्त उपपत्ति दीजिए।)

i) $\phi(n) = n-1 \ \forall\, n \in \mathbb{N}$, जहाँ ϕ ऑयलर–फ़ाई फलन है।

ii) यदि G_1 और G_2 समूह हैं, तथा $f : G_1 \to G_2$ एक समूह समाकारिता है, तो $o(G_1) = o(G_2)$ होगा।

iii) यदि G एक आबेली समूह है, तो G चक्रीय होगा।

iv) यदि G एक समूह है तथा $H \underline{\Delta} G$, तो $|G:H| = 2$ होता है।

v) S_n के प्रत्येक अवयव की कोटि ज़्यादा से ज़्यादा n होती है।

vi) यदि R एक वलय है तथा R की एक गुणजावली I है, तो $xr = rx \ \forall\ x \in I$ और $r \in R$.

vii) यदि $\sigma \in S_n (n \geq 3)$ सम संख्या में असंयुक्त चक्रों का गुणनफल है, तो $\text{sign}(\sigma) = 1$ होता है।

viii) यदि किसी वलय का एक मात्रक है, तो उसका केवल एक ही मात्रक होता है।

ix) परिमित क्षेत्र का अभिलक्षणिक शून्य होता है।

x) $[0, 1]$ से $\mathbb{R}$ तक असंतत फलनों का समुच्चय बिंदुशः योग और गुणन के सापेक्ष एक वलय होता है। (20)

2. (क) $R = \{(n, n+3k) \mid k \in \mathbb{Z}\}$ द्वारा $\mathbb{Z}$ पर एक संबंध R परिभाषित कीजिए। जाँच कीजिए कि R एक तुल्यता संबंध है या नहीं। यदि है, तो सभी अलग–अलग तुल्यता वर्ग ज्ञात कीजिए। यदि R एक तुल्यता संबंध नहीं है, तो $\mathbb{Z}$ पर एक तुल्यता संबंध परिभाषित कीजिए। (5)

(ख) समुच्चय $X = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ पर विचार कीजिए। X पर $*$ को $x_1 * x_2 = x_1 + x_2 + x_1 x_2 \forall\ x_1, x_2 \in X$ द्वारा परिभाषित कीजिए।

i) जाँच कीजिए कि $(X, *)$ एक समूह है या नहीं।

ii) सिद्ध कीजिए कि $x * x * x * \ldots * x$ (n बार) $= (1+x)^n - 1 \ \forall\ n \in \mathbb{N}$ और $x \in X$. (7)

(ग) पुष्टिकरण के साथ, किसी अक्रमविनिमेय समूह के एक क्रमविनिमेय उपसमूह का उदाहरण दीजिए। (3)

3. (क) जाँच कीजिए कि $A = \{z \in \mathbb{C}^* \mid |z| \in \mathbb{Q}\}$ निम्नलिखित का एक उपसमूह है या नहीं :

i) $(\mathbb{C}^*, .)$, ii) $(\mathbb{C}, +)$ (3)

(ख) मान लीजिए कि $(G, .)$ एक परिमित आबेली समूह है तथा $m \in \mathbb{N}$. सिद्ध कीजिए कि $S = \{g \in G \mid (o(g), m) = 1\} \leq G$. (3)

(ग) मान लीजिए कि G कोटि $n \geq 2$ वाला एक समूह है, जिसके केवल दो उपसमूह हैं – $\{e\}$ और स्वयं G. G के लिए एक अल्पिष्ठ जनक समुच्चय ज्ञात कीजिए। साथ ही, यह भी ज्ञात कीजिए कि क्या n एक अभाज्य संख्या है, या भाज्य संख्या है, या दोनों में से कोई भी हो सकती है। (4)

4. (क) फलन $f_{ab}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}: f_{ab}(x) = ax + b$ पर विचार कीजिए। मान लीजिए कि $B = \{f_{ab} \mid a, b \in \mathbb{R}, a \neq 0\}$. तब, फलनों के संयोजन के सापेक्ष B एक समूह है। जाँच कीजिए कि $A = \{f_{ab} \mid a \in \mathbb{Q}^+, b \in \mathbb{R}\}$, B का एक प्रसामान्य उपसमूह है या नहीं। (4)

(ख) समूह $S_n / A_n, n \geq 5$, के अवयवों और इसकी संरचना को स्पष्ट रूप में दीजिए। (3)

(ग) मान लीजिए कि G कोटि 56 का एक समूह है। इसके सभी सीलो p-उपसमूह क्या होंगे? दर्शाइए कि G सरल नहीं है, अर्थात् G का एक उचित प्रसामान्य अतुच्छ उपसमूह अवश्य ही होना चाहिए। (3)

5. (क) एक ऐसा समूह G तथा G की एक ऐसी समाकारिता ϕ ज्ञात कीजिए, जिससे कि $\phi(G) \simeq S_3$ हो तथा $\text{Ker}\, \phi \simeq A_4$ हो। क्या G आबेली होगा? अपने उत्तर के लिए कारण दीजिए। (6)

(ख) मान लीजिए कि G एक ऐसा समूह है कि $\text{Aut}\, G$ चक्रीय है। सिद्ध कीजिए कि G आबेली होगा। (4)

6. क) जाँच कीजिए कि $I = \left\{ \begin{bmatrix} m & 0 \\ n & 0 \end{bmatrix} \middle| m, n \in \mathbb{Z} \right\}$ वलय $\mathbb{M}_2(\mathbb{Z})$ का एक उपवलय है या नहीं। यदि है, तो जाँच कीजिए कि वह इस वलय की एक गुणजावली भी है या नहीं। यदि I इस वलय का एक उपवलय नहीं है, तो इस वलय का एक उपवलय दीजिए। (3)

ख) सिद्ध कीजिए कि वलयों के रूप में, $\frac{\mathbb{R}[x]}{\langle x^2+1 \rangle} \simeq \mathbb{C}$. (5)

ग) $\mathbb{Z}_{12}$ के सभी मात्रकों को ज्ञात कीजिए। (2)

7. क) मान लीजिए कि R एक क्रमविनिमेय तत्समकी वलय है और $r \in R$. समाकारिता के मूल प्रमेय का प्रयोग करते हुए, सिद्ध कीजिए कि $\frac{R[x]}{\langle x-r \rangle} \simeq R$.

इस तरह, दर्शाइए कि $\frac{R[x, y]}{\langle y-r \rangle} \simeq R[x]$. (6)

ख) मान लीजिए कि $D = \{f(x, y) + g(x, y)\, i \mid f, g \in \mathbb{Z}[x, y]\} \subseteq \mathbb{C}[x, y]$. जाँच कीजिए कि D एक UFD है या नहीं। (4)

8. क) मान लीजिए कि $R = \mathbb{Z}[\sqrt{2}\,]$ तथा $M = \{a + b\sqrt{2} \in R \mid 5 | a$ और $5 | b\}$.

i) दर्शाइए कि M, R की एक गुणजावली है।

ii) दर्शाइए कि यदि $5 \nmid a$ या $5 \nmid b$, तो $5 \nmid (a^2 + b^2)$, जहां $a, b \in \mathbb{Z}$.

iii) अतः, दर्शाइए कि यदि N, R की एक ऐसी गुणजावली है जिसका M एक उचित उपसमुच्चय है, तो $N = R$ होगा।

iv) दर्शाइए कि R/M एक क्षेत्र है, तथा इस क्षेत्र के दो अलग–अलग शून्येतर अवयव दीजिए।

(12)

ख) दर्शाइए कि α के अंततः अनेक मान हैं जिनके लिए $\mathbb{Q}[x]$ में $x^7 + 15x^2 - 30x + \alpha$ अखंडनीय है। (3)