No. of Printed Pages : 11 **MTE–14**

BACHELOR'S DEGREE PROGRAMME (BDP)

Term-End Examination
December, 2023

Elective Course : Mathematics

MTE–14 : MATHEMATICAL MODELLING

Time : 2 Hours *Maximum Marks : 50*

Weightage : 70%

Note : *(i) Attempt any* ***five*** *questions.*

(ii) All questions carry equal marks.

(iii) Use of calculators is not allowed.

(iv) Symbols have their usual meanings.

---

1. (a) Traffic flow in a city depends critically on the traffic control scheme. If the scheme is poor, can result long lines, increase in the time to travel across the city. The problem is to evolve a scheme which minimizes the expected time to travel across the city. List four essentials and two non-essentials for the scheme. 3

(b) Consider the system of equations 7

$$\frac{dx}{dt} = x$$

$$\frac{dy}{dt} = -x + 2y$$

Find the critical point of the system. Discuss the type and stability of the critical point. Also write down the general solution of the system and sketch the graph of its trajectories.

2. (a) The maximum velocity of a particle moving in SHM is 10 m/sec and its period is 5 sec. Find its amplitude. 4

(b) Consider the cubic total cost function

$$C = 0.4q^3 - 0.9q^2 + 10q + 5.$$

Assume that the price of q is ₹ 40 per unit. Find the output which yields maximum profit. 6

3. (a) The free fall of a body in a vacuum is related to the gravitational acceleration g and the height h from which the body is released. Use the dimensional analysis to find the velocity V of the falling body. 5

(b) For a raindrop of diameter D = 0.24 cm, find the terminal velocity. Also find how long it takes to reach the ground if it starts its descent in a cloud 4000 m high. 5

4. (a) A string of length l is connected to a fixed point at one end and to a stick of mass m at the other. The stick is whirling in a circle at constant velocity U. Use dimensional analysis to find the equation of the force in the string. 5

(b) Let the returns on the securities of A (security 1) and B (security 2) be as given in table below :

Event (j)	Chance $p_{1_j} = p_{2_j}$	Return	
		R_{1_j}	R_{2_j}
1	$\frac{1}{4}$	18	11
2	$\frac{1}{2}$	13	8
3	$\frac{1}{4}$	6	7

Find the expected return on the portfolio P = (0.7, 0.3). 5

5. (a) A particle falls from rest in a medium in which the resistance is kv^2 per unit mass. Prove that the distance fallen in time t is : 6

$$\left(\frac{1}{k}\right)\log\cosh\left\{t\sqrt{gk}\right\}$$

(b) If a simple pendulum of length l oscillates through on angle α on either side of the mean position, then find the angle θ at any time t, where θ is the angle which the string makes with the vertical. 4

6. (a) The Moon completes a circular orbit of radius 3.8×10^5 km about the earth in 27 days and the Earth completes a circular orbit of radius 1.5×10^8 km around the Sun in 365 days. Compare the mass of the Sun in terms of the mass of the Earth. 5

(b) Consider arterial blood viscosity $\mu = 0.027$ poise. If the length of the artery is 2 cm and radius 8×10^{-3} cm and $P = P_1 - P_2 = 4 \times 10^3$ dynes/cm^2, then

(i) find $u(y)$ and the maximum peak velocity of blood.

(ii) find the shear stress at the wall. 5

7. (a) A forestry biomass is growing logistically with estimated growth rate coefficient 0.71/year and carrying capacity 80.5×10^6 kg. If the initial biomass is $x_0 = 0.25\,\text{K}$, find the biomass two years later. Also find the time t for which $x(t) = 0.75$ K. 6

(b) Characterise the following as deterministic or stochastic, giving reasons for your answers : 4

(i) Functioning of a joint.

(ii) Output product in a chemical reaction.

(iii) The movement of sand dunes.

(iv) The effectiveness of different advertising policies.

MTE–14

स्नातक उपाधि कार्यक्रम (बी. डी. पी.)

सत्रांत परीक्षा

दिसम्बर, 2023

ऐच्छिक पाठ्यक्रम : गणित

एम.टी.ई.–14 : गणितीय निदर्शन

समय : 2 घण्टे *अधिकतम अंक : 50*

भारिता : 70%

नोट : *(i) किन्हीं* ***पाँच*** *प्रश्नों के उत्तर दीजिए।*

(ii) सभी प्रश्नों के अंक समान हैं।

(iii) कैलकुलेटरों का प्रयोग करने की अनुमति नहीं है।

(iv) प्रतीकों के अपने सामान्य अर्थ हैं।

---

1. (अ) एक शहर में यातायात प्रवाह गंभीर रूप से नियंत्रण योजना पर निर्भर करता है। यदि योजना खराब है, तो लंबी लाइनें लग सकती हैं, जिससे पूरे शहर में यात्रा करने के समय में वृद्धि हो जाती है। समस्या एक ऐसी योजना विकसित करने की है जो शहर भर में यात्रा करने के लिए

अपेक्षित समय को कम करती है। इसके लिए आवश्यक चार अनिवार्य और दो गैर–अनिवार्य कार्यों को सूचीबद्ध कीजिए। 3

(ब) निम्नलिखित समीकरण निकाय पर विचार कीजिए :

$$\frac{dx}{dt} = x$$

$$\frac{dy}{dt} = -x + 2y$$

उपर्युक्त समीकरण के सभी क्रांतिक बिंदु ज्ञात कीजिए। इन क्रांतिक बिन्दुओं के प्रकार और स्थायित्व प्राप्त कीजिए । निकाय का सामान्य हल भी लिखिए और उसके प्रक्षेप पथों का आलेख खींचिए। 7

2. (अ) S.H.M. में गतिमान एक कण का अधिकतम वेग 10 m/sec और इसका आवर्तकाल 5 sec है। इसका आयाम ज्ञात कीजिए। 4

(ब) निम्न घन लागत फलन पर विचार कीजिए :

$$\text{C} = 0.4q^3 - 0.9q^2 + 10q + 5.$$

माल लीजिए कि q की कीमत ₹ 40 प्रति इकाई है। वह उत्पादन ज्ञात कीजिए जो अधिकतम लाभ देता है। 6

3. (अ) निर्वात में किसी पिंड का मुक्त रूप से गिरना गुरुत्वाकर्षण त्वरण g और ऊँचाई h से संबंधित है जिससे पिंड मुक्त होता है। गिरते हुए पिंड का वेग (V) ज्ञात करने के लिए विमीय विश्लेषण का प्रयोग कीजिए। 5

(ब) व्यास D = 0.24 cm वाली एक वर्षा की बूँद का अंतिम वेग तथा उसके भूमि तक पहुँचने में लगने वाला समय ज्ञात कीजिए, यदि वह 4000 m ऊँचे एक बादल से नीचे गिरना प्रारंभ करती है। 5

4. (अ) लंबाई l वाली एक डोरी के एक छोर को एक नियत बिंदु से और दूसरे छोर को द्रव्यमान m वाली एक छड़ी से जोड़ा गया है। छड़ी अचर गति v से वृत्ताकार पथ पर घूर्णन कर रही है। विमीय विश्लेषण का प्रयोग करके छड़ी पर कार्यरत बल का समीकरण ज्ञात कीजिए। 5

(ब) प्रतिभूतियों A (प्रतिभूति 1) और B (प्रतिभूति 2) का प्रतिफल बंटन इस प्रकार है :

घटना (j)	संयोग $p_{1_j} = p_{2_j}$	प्रतिफल	
		R_{1_j}	R_{2_j}
1	$\frac{1}{4}$	18	11
2	$\frac{1}{2}$	13	8
3	$\frac{1}{4}$	6	7

पोर्टफोलियो $P = (0.7, 0.3)$ की प्रत्याशित वापसी ज्ञात कीजिए। 5

5. (अ) एक कण एक माध्यम में विरामावस्था से गिरता है जिसमें प्रतिरोध kv^2 इकाई द्रव्यमान है। सिद्ध कीजिए कि समय t में तय की गयी दूरी है : 6

$$\left(\frac{1}{k}\right)\log\cosh\left\{t\sqrt{gk}\right\}$$

(ब) यदि लम्बाई l का एक साधारण लोलक माध्य स्थिति के दोनों ओर α कोण से दोलन करता है, तो समय t पर कोण θ का मान ज्ञात कीजिए, जबकि θ वह कोण है जो डोरी ऊर्ध्वाधर के साथ बनाती है। 4

6. (अ) चंद्रमा 27 दिनों में पृथ्वी के चारों ओर 3.8×10^5 किमी त्रिज्या की एक वृत्ताकार कक्षा पूर्ण करता है और पृथ्वी 365 दिनों में सूर्य के चारों ओर 1.5×10^8 किमी त्रिज्या की वृत्ताकार कक्षा पूर्ण करती है। पृथ्वी के द्रव्यमान के संदर्भ में सूर्य के द्रव्यमान की तुलना कीजिए। 5

(ब) धमनी रक्त श्यानता $\mu = 0.025$ poise है। यदि धमनी की लम्बाई 2 cm, त्रिज्या 8×10^{-3}cm तथा $P = P_1 - P_2 = 4 \times 10^3$ dynes/cm² हो, तो

(i) u(y) और रक्त का अधिकतम शिखर वेग, तथा

(ii) दीवार पर अपरूपण प्रतिबल ज्ञात कीजिए। 5

7. (अ) एक वानिकी पारितंत्र अनुमानित वृद्धि दर 0.71/वर्ष और वहन क्षमता 80.5×10^6 kg के साथ उपस्कर वृद्धि (लॉजिस्टिक) कर रही है। यदि प्रारंभिक बायोमास $x_0 = 0.25\,K$ है, तो दो वर्ष बाद बायोमास ज्ञात कीजिए। साथ ही वह समय t ज्ञात कीजिए जबकि $x(t) = 0.75\,K$ होगा। 6

(ब) अपने उत्तर का कारण देते हुए निम्नलिखित को निर्धारणात्मक अथवा प्रसंभाव्य के रूप में अभिलक्षणित कीजिए : 4

(i) शरीर में जोड़ का कार्य

(ii) रासायनिक प्रतिक्रिया में उत्पाद

(iii) रेत के टीलों की आवाजाही

(iv) विभिन्न विज्ञापन नीतियों की प्रभावशीलता