

No. of Printed Pages : 10

MTE–10

**BACHELOR'S DEGREE PROGRAMME
(BDP)**

Term-End Examination

December, 2023

MTE-10 : NUMERICAL ANALYSIS

Time : 2 Hours

Maximum Marks : 50

Note : (i) *Attempt any five questions.*

(ii) *All computations may be done upto 3 decimal places.*

(iii) *Use of calculators is not allowed.*

(iv) *Symbols have their usual meanings.*

1. (a) Solve the system of equations :

$$4x + y + z = 4$$

$$x + 4y - 2z = 4$$

$$3x + 2y - 4z = 6$$

using LU decomposition method. Take U
with diagonal elements as 1. 6

P. T. O.

- (b) Locate the smallest positive real root of the equation $x^2 - x - 1 = 0$ in an interval of unit length. Taking the end points of this interval as the initial approximation x_0, x_1 , perform two iterations using Regula-Falsi method. 4
2. (a) Obtain an approximate value of $y(1.2)$ using the Taylor's series method of order three for the initial value problem : 4
- $$y' = x - y^2, \quad y(1) = 2 \quad \text{with } h = 0.2$$
- (b) The equation $x^2 + ax + b = 0$ has two real roots p and q such that $|p| < |q|$. If we use the fixed point iteration $x_{k+1} = \frac{-b}{x_k + a}$ to find a root, then to which root does it converge ? 4
- (c) Show by induction that :

$$\Delta^n(e^x) = (e^h - 1)^n e^x,$$

where Δ is the forward difference operator and $h = x_1 - x_0$. 2

3. (a) Using Lagrange interpolation, find the approximate value of $f(1)$ from the following data : 4

x	$f(x)$
-3	-29
-1	-1
0	1
2	11

- (b) The solution of the system of equations $\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 6 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 8 \end{pmatrix}$ is attempted by the Gauss-Jacobi and Gauss-Seidel iteration schemes. Set up the two schemes in the matrix form. Will the iteration schemes converge? Justify your answer. 6

4. (a) Determine the value of h for the function $f(x) = (2+x)^4$, $1 \leq x \leq 2$ with equally spaced nodal points, so that the quadratic interpolation satisfies $|\text{error}| \leq 10^{-6}$. 3

- (b) Evaluate the integral $I = \int_0^1 \frac{dx}{3+2x}$ using the Trapezoidal rule with 2 and 4 subintervals. Determine the minimum number of subintervals required if the error in magnitude is less than 0.002. 7

5. (a) Locate the negative real root of smallest magnitude in an interval of unit length of the equation $3x^3 + 8x^2 + 8x + 5 = 0$. Taking the mid-point of this interval as the initial approximation iterate twice using the Birge-Vieta method. 6
- (b) Using the Runge-Kutta fourth order method with $h = 0.2$, find an approximate value of $y(0.2)$ for the initial value problem : 4

$$y' = x^2 + y^2, \quad y(0) = 1$$

6. (a) Estimate the eigen values of the matrix :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

using the Gerschgorin bound. Draw a rough sketch of the region where the eigen values lie. 5

- (b) The following data values for finding an approximation to $f''(0.3)$ are given : 5

x	$f(x)$
0.1	0.091
0.2	0.155
0.3	0.182
0.4	0.171
0.5	0.130

Using the central difference formula of $O(h^2)$, find an approximation to $f''(0.3)$ with $h = 0.2$ and $h = 0.1$. Hence find an improved estimate using extrapolation.

7. (a) Obtain the unique polynomial $P(x)$ of degree 3 or less corresponding to a function $f(x)$, where $f(0) = 1$, $f'(0) = 2$, $f(1) = 5$, $f'(1) = 4$. 4

- (b) Solve $\frac{dy}{dx} = \frac{y-x}{y+x}$ with $y(0) = 1$ using

Euler's method in the interval $[0, 0.04]$ by dividing the interval into 2 subintervals. 3

- (c) Using synthetic division, find $f'(3)$ where

$$f(x) = x^5 - 3x^4 + 2x^2 - 1. \quad 3$$

MTE-10

स्नातक उपाधि कार्यक्रम (बी. डी. पी.)

सत्रांत परीक्षा

दिसम्बर, 2023

एम.टी.ई.-10 : संख्यात्मक विश्लेषण

समय : 2 घण्टे

अधिकतम अंक : 50

नोट : (i) कोई पाँच प्रश्न हल कीजिए।

(ii) सारी गणनाएँ दशमलव के 3 स्थानों तक की जा सकती हैं।

(iii) कैल्कुलेटर्स के प्रयोग की अनुमति नहीं है।

(iv) प्रतीकों के अपने सामान्य अर्थ हैं।

1. (क) समीकरण निकाय :

$$4x + y + z = 4$$

$$x + 4y - 2z = 4$$

$$3x + 2y - 4z = 6$$

को LU वियोजन विधि से हल कीजिए। U के

विकर्ण अवयव 1 लीजिए।

6

(ख) एक इकाई अन्तराल में समीकरण $x^2 - x - 1 = 0$ का न्यूनतम धनात्मक वास्तविक मूल ज्ञात कीजिए। इस अन्तराल के अन्त्य बिन्दुओं को प्रारम्भिक सन्निकटन x_0, x_1 मानकर रेगुला-फाल्सी विधि की दो पुनरावृत्तियाँ दीजिए। 4

2. (क) तृतीय कोटि की टेलर श्रेणी विधि का प्रयोग करके आदिमान समस्या :

$$y' = x - y^2, \quad y(1) = 2, \quad h = 0.2$$

के लिए $y(1.2)$ का मान आकलित कीजिए। 4

(ख) समीकरण $x^2 + ax + b = 0$ के दो वास्तविक मूल p और q इस प्रकार हैं कि $|p| < |q|$ है।

यदि हम नियत बिन्दु पुनरावृत्ति $x_{k+1} = \frac{-b}{x_k + a}$

का प्रयोग करके एक मूल ज्ञात करें, तो किस मूल पर यह विधि अभिसरित होगी ? 4

(ग) आगमन द्वारा सिद्ध कीजिए कि :

$$\Delta^n(e^x) = (e^h - 1)^n e^x$$

जहाँ Δ अग्रान्तर संकारक है और $h = x_1 - x_0$ है। 2

3. (क) लग्रांज अन्तर्वेशन का प्रयोग करके निम्नलिखित आंकड़ों से $f(1)$ का सन्निकट मान ज्ञात कीजिए :

x	$f(x)$
-3	-29
-1	-1
0	1
2	11

- (ख) समीकरण निकाय को हल $\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 6 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 8 \end{pmatrix}$

को हल करने के लिए गाउस-जैकोबी और गाउस-सीडल पुनरावृत्ति विधियों का प्रयोग किया जाता है। दोनों विधियों को आव्यूह रूप में लिखिए। क्या ये पुनरावृत्ति विधियाँ अभिसरित करेंगी ? अपने उत्तर की पुष्टि कीजिए। 6

4. (क) समदूरस्थ निस्पंदों के साथ फलन $f(x) = (2+x)^4, 1 \leq x \leq 2$ के लिए h का वह मान ज्ञात कीजिए जिससे द्विघातीय अन्तर्वेशन में त्रुटि का परिमाण अधिकतम 10^{-6} हो। 3

(ख) 2 और 4 उप-अन्तराल लेकर समलंबी नियम से समाकल $I = \int_0^1 \frac{dx}{3+2x}$ का मान ज्ञात कीजिए। यदि त्रुटि का परिमाण 0.002 से कम हो, तो उपअन्तरालों की न्यूनतम संख्या ज्ञात कीजिए। 7

5. (क) समीकरण $3x^3 + 8x^2 + 8x + 5 = 0$ का एक इकाई अन्तराल में न्यूनतम परिमाण वाला एक ऋण मूल ज्ञात कीजिए। इस अन्तराल के मध्य बिन्दु को प्रारम्भिक सन्निकटन मानकर बर्ज-विष्टा विधि की दो पुनरावृत्तियाँ दीजिए। 6

(ख) $h = 0.2$ के साथ, चतुर्थ कोटि रुंगे-कुट्टा विधि का प्रयोग करके आदिमान समस्या :

$$y' = x^2 + y^2, \quad y(0) = 1$$

के लिए $y(0.2)$ का सन्निकट मान ज्ञात कीजिए। 4

6. (क) गर्शगोरिन परिबंधों के प्रयोग से आव्यूह :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

के आइगेन मान आकलित कीजिए। आइगेन मानों को आविष्ट करने वाले क्षेत्र का एक स्थूल आरेख बनाइए। 5

(ख) $f''(0.3)$ के सन्निकटन के लिए निम्नलिखित आँकड़े दिए गए हैं :

x	$f(x)$
0.1	0.091
0.2	0.155
0.3	0.182
0.4	0.171
0.5	0.130

$O(h^2)$ के केन्द्रीय अन्तर सूत्र का प्रयोग करके $h = 0.2$ और $h = 0.1$ के साथ $f''(0.3)$ के सन्निकट ज्ञात कीजिए। इस प्रकार, बहिर्वेशन से एक संशोधित आकलन ज्ञात कीजिए। 5

7. (क) एक फलन $f(x)$, जहाँ $f(0) = 1$, $f'(0) = 2$, $f(1) = 5$, $f'(1) = 4$ है, के संगत घात 3 या कम वाला अद्वितीय बहुपद $P(x)$ ज्ञात कीजिए। 4

(ख) अन्तराल $[0, 0.04]$ को दो उप-अन्तरालों में विभाजित करके, ऑयलर विधि से $y(0) = 1$ के साथ $\frac{dy}{dx} = \frac{y-x}{y+x}$ को हल कीजिए। 3

(ग) संश्लेषित विभाजन से $f'(3)$ ज्ञात कीजिए, जहाँ $f(x) = x^5 - 3x^4 + 2x^2 - 1$ हो। 3