No. of Printed Pages : 9 **MTE–09**

BACHELOR'S DEGREE PROGRAMME (BDP)

Term-End Examination

December, 2023

ELECTIVE COURSE : MATHEMATICS

MTE-09 : REAL ANALYSIS

Time : 2 Hours *Maximum Marks : 50*

Weightage : 70%

Note : *Attempt **five** questions in all. Q. No. **1** is compulsory. Answer any **four** questions from Question Nos. **2** to **7**.*

---

1. State the following statements are true or false ? Give reasons for your answers : 2 each

   (i) The function f defined on [5, 6] by :

   $$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{when } x \text{ is rational} \\ -1, & \text{when } x \text{ is irrational} \end{cases}$$

   is integrable.

   (ii) – 2 is a limit point of the interval [–3, 2].

   (iii) The function $f:[1,50] \to \mathbf{R}$ defined by $f(x) = 20 - [x]$ ([x] ≡ greatest integer function) is continuous.

   (iv) $\sum (-1)^n \frac{2}{n}$ is a convergent series.

(v) For the function $f(x) = x^3 - 4x^2 + 5x - 2$, there exists a point $c \in]1, 2[$ such that $f'(c) = 0$.

2. (a) Prove that between any two real roots of the equation, $3\cos x = e^{-3x}$, there is at least one real root of the equation $e^{3x} \sin x = 1$. 3

(b) Check whether the intervals [7, 11 [and]2, 6] are equivalent or not. 2

(c) Prove that every absolutely convergent series is convergent. Is the converse of this statement true ? Justify your answer. 5

3. (a) Find the limit as $n \to \infty$ of the sum : 4

$$\frac{1}{n}\left[\sin\left(\frac{\pi}{n}\right) + \sin\left(\frac{2\pi}{n}\right) + \sin\left(\frac{3\pi}{n}\right) + \ldots\ldots + \sin\left(\frac{3x\pi}{n}\right)\right]$$

(b) Show that the function $f :]-1, 1[\to \mathbf{R}$ given by $f(x) = x^4$ is uniformly continuous on its domain. Hence deduce that it is continuous at $x = 0$. 4

(c) Write the inequality $3 \le 4x - 2 \le 5$ in the modulus form. 2

4. (a) Find : 2

$$\lim_{x \to -3} \frac{2}{(x+3)^2}$$

(b) Prove that for $x \in]0, 1[$: 4

$$x < -\log(1-x) < \frac{x}{1-x}.$$

(c) Let $f : [0, 1] \to \mathbf{R}$ be a function defined by $f(x) = 4x + 1$.

Let :

$$P_1 = \left\{0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, 1\right\} \text{ and } P_2 = \left\{0, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, 1\right\}$$

be two partitions of the interval [0, 1]. Prove or disprove : 4

$$L(P_2, f) \le U(P_1, f).$$

5. (a) Let a function f be defined by :

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 1, & -\infty < x \le 1 \\ \dfrac{3x^2 - 2}{x}, & 1 < x \le 2 \\ 2x - 1, & 2 < x < \infty \end{cases}$$

Discuss the continuity of f at $x = 1, 2$. 4

(b) Let $\phi \subset S \subset \mathbf{R}$ and u be an upper bound of S. Show that u is supremum of S′ if and only if $\forall \varepsilon > 0$, there exists an $s_\varepsilon \in S'$ such that $s_\varepsilon > u - \varepsilon$. 4

(c) Test the convergence of the series : 2

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left[\sqrt{n^3+1}-\sqrt{n^3-1}\right]$$

6. (a) Show that the sequence $\{f_n\}$, where :

$$f_n(x) = \frac{x}{1+nx^2}, x \in [1, \infty[$$

is uniformly convergent in it. 4

(b) Give an example to show that intersection of an infinite number of open sets need not be an open set. 3

(c) Check whether the function $f:[1,2] \to \mathbf{R}$ defined by $f(x) = x - e^{-x}$ is one-one or not. Is it onto also ? Justify your answer. 3

7. (a) By showing that the remainder after n-terms tends to zero, find the Maclaurin's series expansion of $\cos 3x$. 4

(b) Test the following series for convergence : 4

$$\frac{1}{5}+\frac{1.4}{5.8}x+\frac{1.4.7}{5.8.11}x^2+......\infty\,(x>0)$$

(c) Evaluate : 2

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos 2x}{e^{2x} - 1}.$$

MTE–09

स्नातक उपाधि कार्यक्रम (बी. डी. पी.)

सत्रांत परीक्षा

दिसम्बर, 2023

ऐच्छिक पाठ्यक्रम : गणित

एम.टी.ई.—09 : वास्तविक विश्लेषण

समय : 2 घण्टे *अधिकतम अंक : 50*

भारिता : 70%

नोट : *कुल* ***पाँच*** *प्रश्नों के उत्तर दीजिए। प्र. सं. **1*** ***अनिवार्य*** *है। प्र. सं. **2** से **7** तक किन्हीं* ***चार*** *प्रश्नों के उत्तर दीजिए।*

1. बताइए कि निम्नलिखित कथन सत्य हैं या असत्य ? अपने उत्तरों के कारण दीजिए : प्रत्येक 2

   (i) $$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{जब } x \text{ परिमेय है} \\ -1, & \text{जब } x \text{ अपरिमेय है} \end{cases}$$

   द्वारा $[5,6]$ पर परिभाषित फलन f समाकलनीय है।

   (ii) -2 अंतराल $[-3,2]$ का एक सीमा बिन्दु है।

(iii) $f(x) = 20 - [x]$ द्वारा परिभाषित फलन $f:[1,50] \to \mathbf{R}$ ($[x] \equiv$ महत्तम पूर्णांक फलन) संतत है।

(iv) $\sum (-1)^n \frac{2}{n}$ एक अभिसारी श्रेणी है।

(v) फलन $f(x) = x^3 - 4x^2 + 5x - 2$ के लिए एक ऐसा बिन्दु $c \in]1,2[$ है कि $f'(c) = 0$ है।

2. (क) सिद्ध कीजिए कि समीकरण $3\cos x = e^{-3x}$ के किन्हीं **दो** मूलों के बीच में कम से कम एक मूल तो समीकरण $e^{3x}\sin x = 1$ का है। 3

(ख) जाँच कीजिए कि अंतराल [7,11[और]2,6] तुल्य हैं या नहीं। 2

(ग) सिद्ध कीजिए कि प्रत्येक निरपेक्षतः अभिसारी श्रेणी अभिसारी होती है। क्या इस कथन का विलोम भी सत्य है ? अपने उत्तर की पुष्टि कीजिए। 5

3. (क) योगफल

$$\frac{1}{n}\left[\sin\left(\frac{\pi}{n}\right) + \sin\left(\frac{2\pi}{n}\right) + \sin\left(\frac{3\pi}{n}\right) + \ldots\ldots + \sin\left(\frac{3x\pi}{n}\right)\right]$$

की सीमा ज्ञात कीजिए जब $n \to \infty$ हो। 4

(ख) दिखाइए कि $f(x) = x^4$ द्वारा परिभाषित फलन $f:]-1,1[\to \mathbf{R}$ अपने प्रांत पर एकसमानतः संतत है। इस प्रकार, प्राप्त कीजिए कि यह $x = 0$ पर संतत है। 4

(ग) असमिका $3 \le 4x - 2 \le 5$ को परिमाण रूप में व्यक्त कीजिए। 2

4. (क) ज्ञात कीजिए : 2

$$\lim_{x\to -3} \frac{2}{(x+3)^2}$$

(ख) $x \in]0,1[$ के लिए सिद्ध कीजिए : 4

$$x < -\log(1-x) < \frac{x}{1-x}$$

(ग) मान लीजिए $f:[0,1]\to \mathbf{R}$, $f(x) = 4x+1$ द्वारा परिभाषित कोई फलन है। मान लीजिए :

$$P_1 = \left\{0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, 1\right\} \text{ और } P_2 = \left\{0, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, 1\right\}$$

अंतराल $[0,1]$ के दो विभाजन हैं। सिद्ध या असिद्ध कीजिए : 4

$$L(P_2, f) \le U(P_1, f)$$

5. (क) मान लीजिए एक फलन f इस प्रकार परिभाषित है :

$$f(x)=\begin{cases} x^2+1, & -\infty < x \le 1 \\ \dfrac{3x^2-2}{x}, & 1 < x \le 2 \\ 2x-1, & 2 < x < \infty \end{cases}$$

$x=1,2$ पर f के सांतत्य की चर्चा कीजिए। 4

(ख) मान लीजिए $\phi \subset S \subset \mathbf{R}$ और u, S का एक उपरि परिबंध है। दिखाइए कि u, S' का न्यूनतम उपरि परिबंध है यदि और केवल यदि प्रत्येक $\varepsilon > 0$ के लिए एक $s_\varepsilon \in S'$ इस प्रकार है कि $s_\varepsilon > u - \varepsilon$ है। 4

(ग) श्रेणी $\sum_{n=1}^{\infty}\left[\sqrt{n^3+1}-\sqrt{n^3-1}\right]$ के अभिसरण का परीक्षण कीजिए। 2

6. (क) दिखाइए कि अनुक्रम $\{f_n\}$, जहाँ :

$$f_n(x)=\frac{x}{1+nx^2}, x \in [1,\infty[$$

है, एक समानतः अभिसारी है। 4

(ख) एक उदाहरण देकर दिखाइए कि अनंततः अनेक विवृत समुच्चयों का उभयनिष्ठ जरूरी नहीं कि विवृत ही हो। 3

(ग) जाँच कीजिए कि $f(x) = x - e^{-x}$ द्वारा परिभाषित फलन $f:[1,2] \to \mathbf{R}$ एकैकी है या नहीं। क्या यह आच्छादक भी है ? अपने उत्तर की पुष्टि कीजिए। 3

7. (क) यह दर्शाइए कि n पदों के बाद शेषफल शून्य की ओर अग्रसर होता है, $\cos 3x$ का मैक्लॉरिन श्रेणी प्रसार ज्ञात कीजिए। 4

(ख) निम्नलिखित श्रेणो के अभिसरण की जाँच कीजिए : 4

$$\frac{1}{5} + \frac{1.4}{5.8} x + \frac{1.4.7}{5.8.11} x^2 + \ldots\ldots \infty \left(x > 0\right)$$

(ग) मान ज्ञात कीजिए : 2

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos 2x}{e^{2x} - 1}$$