

**BACHELOR'S DEGREE PROGRAMME  
(BDP)**

**Term-End Examination**

**December, 2023**

**MTE-06 : ABSTRACT ALGEBRA**

*Time : 2 Hours*

*Maximum Marks : 50*

---

**Note :** (i) Attempt **five** questions in all.

(ii) Question No. 7 is **compulsory**.

(iii) Answer any **four** questions from Q. Nos.  
1 to 6.

(iv) Use of calculator is not allowed.

---

---

1. (a) Consider the binary operation A defined on  $X = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}\}$  by :

$$a * b = a + b + ab \pmod{5}.$$

Check that  $*$  is associative. Form the multiplication table for  $*$ . 5

- (b) Define an integral domain. Give an example of a ring which is not an integral domain. 2
- (c) Define a Sylow- $p$  subgroup of a finite group  $G$ . Find the orders of Sylow- $p$  subgroups of a group of order 20. 3
2. (a) Check whether :
- $$\mathbf{R} = \{(0, 0), (1, 1), (2, 2), (3, 3), (1, 2), (2, 1), (2, 3), (3, 2)\}$$
- is a reflexive, symmetric and transitive relation on the set  $\{0, 1, 2, 3\}$ . 3
- (b) Write  $\sigma = (2\ 5\ 1\ 4)(5\ 3\ 2)$  as a product of transpositions as well as product of disjoint cycles. Also, find the signature of  $\sigma$ . 4
- (c) Let  $f(x) = 2x^4 + 15x^3 + 18x + 12$ . Is  $\frac{\mathbf{Q}[x]}{\langle f(x) \rangle}$  a field? Justify your answer. 3
3. (a) Let  $\mathbf{X} = \left\{ \left[ \begin{array}{cc} a & 0 \\ b & 0 \end{array} \right] \mid a, b \in \mathbf{R} \right\}$ . Check whether or not  $\mathbf{X}$  is a subring of  $\mathbf{M}_2(\mathbf{R})$ . Is  $\mathbf{X}$  a ring with identity? Give reasons for your answer. 3

- (b) Define a nilpotent element in a ring. Give an example of a ring  $R$  and a nilpotent element  $x \in R$ . 2
- (c) Show that  $\mathbf{Z}[\sqrt{-5}]$  is not a UFD by giving two distinct factorisations of 6 into irreducible elements of  $\mathbf{Z}[\sqrt{-5}]$ . 5
4. (a) Define the unit element in a ring with unity. Find all units in  $Z_{15}$ . 3
- (b) Define the centre of a group. Show that a group is abelian if and only if the centre of the group is the whole group. 3
- (c) Let 
$$G = \left\{ \left[ \begin{array}{cc} a & b \\ c & d \end{array} \right] \mid a, b, c, d \in \mathbf{Z}, \right.$$

$$\left. \det \left[ \begin{array}{cc} a & b \\ c & d \end{array} \right] = 1 \right\}$$
. Check whether  $G$  is a group under matrix multiplication. 4
5. (a) Give an example of each of the following : 7
- (i) A subring of  $M_2(\mathbf{Z})$  which is not an ideal of  $M_2(\mathbf{Z})$ .
- (ii) A non-zero proper ideal of  $M_2(\mathbf{Z})$ .
- (iii) A zero divisor in  $M_2(\mathbf{Z})$ .
- (b) Find the order of the elements  $\bar{2}$ ,  $\bar{8}$  and  $\bar{10}$  in  $Z_{21}^*$ . 3

6. (a) Prove that  $f : R \rightarrow S$  given by

$$f(a + b\sqrt{2}) = \begin{bmatrix} a & 2b \\ b & a \end{bmatrix},$$

is a homomorphism of rings, where  $R = \mathbb{Z} + \sqrt{2}\mathbb{Z}$  and  $S$  is the ring of  $2 \times 2$  matrices of the form

$$\begin{bmatrix} a & 2b \\ b & a \end{bmatrix}, a, b \in \mathbb{Z}. \text{ Is } f \text{ a bijection? Justify}$$

your answer. 3

- (b) Prove that  $F = \{a + \sqrt{3}b \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$  is a subfield of  $\mathbb{C}$ . 4

- (c) Let  $R$  be a ring such that  $a^2 = a$  for  $a \in R$ . Show that  $R$  is a commutative ring. 3

7. Which of the following statements are true and which are false? Justify your answer with a short proof or a counter-example : 5×2=10

- (a) If  $H$  is a normal subgroup of a group  $G$  such that  $\frac{G}{H}$  is cyclic, then  $G$  is abelian.

- (b) Every surjective homomorphism of a finite group  $G$  to itself is an isomorphism.

- (c) If  $R$  is a non-trivial subring of  $\mathbb{Q}$  such that  $x^{-1} \in R$  for all  $x \in R \setminus \{0\}$ , then  $R = \mathbb{Q}$ .
- (d) If  $R$  is an integral domain, then  $\frac{R}{I}$  is an integral domain for every non-zero ideal  $I$  of  $R$ .
- (e) If  $I$  and  $J$  are ideals of a ring  $R$ , then  $I \cup J$  is an ideal of  $R$ .

**MTE-06**

स्नातक उपाधि कार्यक्रम ( बी. डी. पी. )

सत्रांत परीक्षा

दिसम्बर, 2023

एम.टी.ई.-06 : अमूर्त बीजगणित

समय : 2 घण्टे

अधिकतम अंक : 50

नोट : (i) कुल पाँच प्रश्नों के उत्तर दीजिए।

(ii) प्रश्न सं. 7 करना जरूरी है।

(iii) प्रश्न क्र. 1 से 6 तक किन्हीं चार प्रश्नों के उत्तर दीजिए।

(iv) कैल्कुलेटर का प्रयोग करने की अनुमति नहीं है।

- 
1. (क) समुच्चय  $X = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}\}$  पर  $a * b = a + b + ab \pmod{5}$  द्वारा परिभाषित द्वि-आधारी संक्रिया लीजिए। जाँच कीजिए कि \* साहचर्य है। संक्रिया \* के लिए गुणन तालिका बनाइए।

- (ख) पूर्णाकीय प्रांत को परिभाषित कीजिए। एक वलय का उदाहरण दीजिए जो पूर्णाकीय प्रांत न हो। 2
- (ग) एक परिमित समूह का सीलो- $p$  उपसमूह  $G$  को परिभाषित कीजिए। एक कोटि 20 वाले परिमित समूह के सीलो- $p$  उपसमूहों की कोटि ज्ञात कीजिए। 3

2. (क) जाँच कीजिए कि सम्बन्ध :

$$R = \{(0, 0), (1, 1), (2, 2), (3, 3), (1, 2), (2, 1), (2, 3), (3, 2)\}$$

समुच्चय  $\{0, 1, 2, 3\}$  पर स्वतुल्य, सममित एवं संक्रामक सम्बन्ध है। 3

- (ख) क्रमचय  $\sigma = (2\ 5\ 1\ 4)(5\ 3\ 2)$  को पक्षांतरणों के गुणन क रूप में एवं असंयुक्त चक्रों के गुणनफलन क रूप में लिखिए।  $\sigma$  का चिह्नक ज्ञात कीजिए। 4

- (ग) मान लीजिए  $f(x) = 2x^4 + 15x^3 + 18x + 12$ । क्या  $\frac{\mathbb{Q}[x]}{\langle f(x) \rangle}$  एक क्षेत्र है ? अपने उत्तर की पुष्टि कीजिए। 3

3. (क) मान लीजिए कि  $X = \left\{ \begin{bmatrix} a & 0 \\ b & 0 \end{bmatrix} \mid a, b \in \mathbf{R} \right\}$   
जाँच कीजिए कि  $X$ ,  $M_2(\mathbf{R})$  का उपवलय है या नहीं। क्या  $X$  एक तत्समकी वलय है ? अपने उत्तर की पुष्टि कीजिए। 3
- (ख) एक वलय में शून्य भावि अवयव का परिभाषित कीजिए। एक वलय  $R$  और उसके अवयव  $x \in R$  का उदाहरण दीजिए जो शून्य भावि है। 2
- (ग)  $\mathbf{Z}[\sqrt{-5}]$  में 6 के अखण्डनीय अवयवों के दो अलग-अलग गुणनखंडन देकर सिद्ध कीजिए कि  $\mathbf{Z}[\sqrt{-5}]$  UFD नहीं है। 5
4. (क) एक वलय में मात्रक अवयव को परिभाषित कीजिए।  $\mathbf{Z}_{15}$  के सभी मात्रक अवयव ज्ञात कीजिए। 3
- (ख) एक समूह का केन्द्र को परिभाषित कीजिए। सिद्ध कीजिए कि एक समूह तभी और केवल तभी आबेली है जब उसका केन्द्र पूरा समूह है। 3
- (ग) मान लीजिए  $G = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \mid a, b, c, d \in \mathbf{Z}, \det \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = 1 \right\}$ । जाँच कीजिए कि  $G$  आव्यूह गुणन के सापेक्ष समूह है। 4



5. (क) निम्नलिखित के लिए एक-एक उदाहरण दीजिए :

7

(i)  $M_2(\mathbb{Z})$  का एक उपवलय जो गुणजावली न हो।

(ii)  $M_2(\mathbb{Z})$  का एक उचित गुणजावली।

(iii)  $M_2(\mathbb{Z})$  में एक शून्य भाजक।

(ख) समूह  $Z_{21}^*$  में अवयवों  $\bar{2}$ ,  $\bar{8}$  और  $\bar{10}$  की कोटि ज्ञात कीजिए।

3

6. (क) सिद्ध कीजिए कि  $f(a + b\sqrt{2}) = \begin{bmatrix} a & 2b \\ b & a \end{bmatrix}$ ,

द्वारा परिभाषित  $f : \mathbb{R} \rightarrow S$  एक समाकारिता है,

जहाँ  $\mathbb{R} = \mathbb{Z} + \sqrt{2}\mathbb{Z}$  और  $S, 2 \times 2$  आव्यूहों

$\begin{bmatrix} a & 2b \\ b & a \end{bmatrix}, a, b \in \mathbb{Z}$ , का वलय है। क्या  $f$

एकैकी आच्छादक है ? अपने उत्तर की पुष्टि

कीजिए।

3

(ख) सिद्ध कीजिए कि  $F = \{a + \sqrt{3}b \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$

$\mathbb{C}$  का एक उपक्षेत्र है।

4

(ग) मान लीजिए वलय  $\mathbb{R}$  में सभी  $a \in \mathbb{R}$  के लिए

$a^2 = a$  है। दिखाइए कि  $\mathbb{R}$  एक क्रमविनिमेय

वलय है।

3

7. निम्नलिखित कथनों में से कौन-से कथन सत्य और कौन-से कथन असत्य हैं ? अपने उत्तर की लघु उपपत्ति या प्रत्युदाहरण द्वारा पुष्टि कीजिए :  $5 \times 2 = 10$
- (क) यदि  $H$  समूह  $G$  का एक प्रसामान्य उपसमूह है जिसके लिए  $\frac{G}{H}$  आबेली है, तो  $G$  आबेली है।
- (ख) एक परिमित समूह  $G$  से  $G$  तक कोई भी आच्छादक समाकारिता तुल्यकारिता होता है।
- (ग) यदि  $R, Q$  का एक अतुच्छ उपवलय है जिसके लिए, सभी  $x \in R \setminus \{0\}$  के लिए,  $x^{-1} \in R$ , तो  $R = Q$ ।
- (घ) यदि  $R$  एक पूर्णांक प्रान्त है, तो  $R$  के सभी गुणजावली  $I$  के लिए  $\frac{R}{I}$  भी प्रांत होता है।
- (ङ) यदि  $I$  और  $J$  वलय  $R$  की गुणजावलियाँ हैं, तो  $I \cup J$  भी एक गुणजावली है।