

No. of Printed Pages : 15 **MTE-04/MTE-05**

**BACHELOR'S DEGREE PROGRAMME
(BDP)**

Term-End Examination

December, 2023

(Elective Course : Mathematics)

MTE-04 : ELEMENTARY ALGEBRA

&

MTE-05 : ANALYTICAL GEOMETRY

Time : 3 Hours

Maximum Marks : 50

Instructions :

- 1. Students registered for both MTE-04 & MTE-05 courses should answer both the question papers in two separate answer books entering their enrolment number, course code and course title clearly on both the answer books.*
 - 2. Students who have registered for MTE-04 or MTE-05 should answer the relevant question paper after entering their enrolment number, course code and course title on the answer book.*
-
-

P. T. O.

MTE-04/MTE-05

स्नातक उपाधि कार्यक्रम (बी. डी. पी.)

सत्रांत परीक्षा

दिसम्बर, 2023

(ऐच्छिक पाठ्यक्रम : गणित)

एम.टी.ई.-04 : प्रारंभिक बीजगणित

एवं

एम.टी.ई.-05 : वैश्लेषिक ज्यामिति

समय : 3 घण्टे

अधिकतम अंक : 50

निर्देश :

1. जो छात्र एम.टी.ई.-04 और एम.टी.ई.-05 दोनों पाठ्यक्रमों के लिए पंजीकृत हैं, दोनों प्रश्न-पत्रों के उत्तर अलग-अलग उत्तर पुस्तिकाओं में अपना अनुक्रमांक, पाठ्यक्रम कोड तथा पाठ्यक्रम नाम साफ-साफ लिखकर दें।
2. जो छात्र एम.टी.ई.-04 या एम.टी.ई.-05 किसी एक के लिए पंजीकृत हैं, अपने उसी प्रश्न-पत्र के उत्तर उत्तर-पुस्तिका में अपना अनुक्रमांक, पाठ्यक्रम कोड तथा पाठ्यक्रम नाम साफ-साफ लिखकर दें।

MTE-04**BACHELOR'S DEGREE PROGRAMME
(BDP)****Term-End Examination****December, 2023****MTE-04 : ELEMENTARY ALGEBRA***Time : $1\frac{1}{2}$ Hours**Maximum Marks : 25*

*Note : Question No. 5 is compulsory. Do any **three** questions from Question No. 1 to 4. Use of calculator is not allowed.*

1. (a) Let $1, \omega, \omega^2$ be the cube roots of unity.

Evaluate : $2\frac{1}{2}$

$$(1-\omega)(1-\omega^2)(1-\omega^4)(1-\omega^5)$$

- (b) Let A and B be subsets of a Universal set X. Show that :

$$A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$$

where Δ is the symmetric difference between A and B. $2\frac{1}{2}$

2. (a) Prove that : 3

$$\begin{vmatrix} a^2 & a^2 - (b-c)^2 & bc \\ b^2 & b^2 - (c-a)^2 & ca \\ c^2 & c^2 - (a-b)^2 & ab \end{vmatrix}$$

$$= (b-c)(c-a)(a-b)(a+b+c)(a^2 + b^2 + c^2)$$

- (b) If a, b, c are roots of the equation $x^3 + qx + r = 0$. Find the value of $(b-c)^2 + (c-a)^2 + (a-b)^2$. 2

3. (a) For $0 < a_t < 1, t = 1, 2, \dots, n$ prove that : $2\frac{1}{2}$

$$1 - \prod_{t=1}^n a_t < n - \sum_{t=1}^n a_t$$

- (b) A cinema hall has a 700 seats. These seats are divided into two sections Y and Z. The cost of ticket in section Y is ₹ 100 and that of in Section Z is ₹ 150. Assume that all the seats are occupied. Find the number of seats allocated to each section to get daily revenue of ₹ 80,000. $2\frac{1}{2}$

4. (a) Solve the following system of equations by Gaussian elimination method : $2\frac{1}{2}$

$$x + 3y - 2z = 10$$

$$2x + y + z = 5$$

$$6x - 3y + 7z = 15$$

- (b) Find the fourth roots of the complex number $z = i$. $2\frac{1}{2}$

5. Which of the following statements are true and which are false ? Give a short proof or a counter-example to justify your answer. $5 \times 2 = 10$

- (a) If $P(x)$ is a real polynomial having a root $z \in \mathbf{C}$, then \bar{z} is also a root of $P(x)$.

- (b) If

$$A = \{x \in \mathbf{R} \mid 0 \leq x \leq 1\} \text{ and}$$

$$B = \{x \in \mathbf{R} \mid 1 \leq x \leq 3\},$$

$$\text{then } A \Delta B = [0, 1) \cup (1, 3].$$

- (c) If

$$a, b \in \mathbf{R}, a^2 + b^2 = 1 \text{ and } x^2 + y^2 = 1,$$

$$\text{then } ax + by < 1.$$

- (d) For any $z \in \mathbf{C}$, $\text{Arg}(z) = \text{Arg}(\bar{z})$

- (e) If A and B are the subsets of the universal set X, then $A \times B = B \times A$.

MTE-04

स्नातक उपाधि कार्यक्रम (बी. डी. पी.)

सत्रांत परीक्षा

दिसम्बर, 2023

एम.टी.ई.-04 : प्रारंभिक बीजगणित

समय : $1\frac{1}{2}$ घण्टे

अधिकतम अंक : 25

नोट : प्रश्न सं. 5 करना जरूरी है। प्रश्न सं. 1 से 4 तक से कोई तीन प्रश्न हल कीजिए। कैल्कुलेटर के प्रयोग की अनुमति नहीं है।

1. (क) मान लीजिए कि $1, \omega, \omega^2$ इकाई के घनमूल हैं।

मान निकालिए : $2\frac{1}{2}$

$$(1-\omega)(1-\omega^2)(1-\omega^4)(1-\omega^5)$$

(ख) मान लीजिए कि A और B एक समष्टीय समुच्चय X के उपसमुच्चय हैं। दर्शाइए कि :

$$A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$$

है, जहाँ Δ समुच्चयों A और B के बीच सममित अन्तर है। $2\frac{1}{2}$

2. (क) सिद्ध कीजिए कि :

$$\begin{vmatrix} a^2 & a^2 - (b-c)^2 & bc \\ b^2 & b^2 - (c-a)^2 & ca \\ c^2 & c^2 - (a-b)^2 & ab \end{vmatrix}$$

$$= (b-c)(c-a)(a-b)(a+b+c)(a^2 + b^2 + c^2)$$

है। 3

(ख) यदि a, b और c समीकरण $x^3 + qx + r = 0$ के मूल हैं, तो

$$(b-c)^2 + (c-a)^2 + (a-b)^2$$

का मान ज्ञात कीजिए। 2

3. (क) $0 < a_t < 1, t = 1, 2, \dots, n$ के लिए, सिद्ध कीजिए कि :

$$1 - \prod_{t=1}^n a_t < n - \sum_{t=1}^n a_t$$

है। $2\frac{1}{2}$

(ख) किसी सिनेमा हॉल में 700 सीटें हैं। इन सीटों को दो अनुभागों Y और Z में विभाजित किया गया है। अनुभाग Y में टिकट की लागत ₹ 100 है

तथा अनुभाग Z में टिकट की लागत ₹ 150 है।
परिकल्पना कीजिए कि सभी सीटें भरी हुई हैं।
दैनिक राजस्व ₹ 80,000 प्राप्त करने के लिए,
प्रत्येक अनुभाग को बंटित सीटों की संख्या ज्ञात
कीजिए। $2\frac{1}{2}$

4. (क) गाउसीय विलोपन विधि द्वारा, निम्नलिखित
समीकरण-निकाय को हल कीजिए : $2\frac{1}{2}$

$$x + 3y - 2z = 10$$

$$2x + y + z = 5$$

$$6x - 3y + 7z = 15$$

(ख) सम्मिश्र संख्या $z = i$ का चतुर्थ मूल ज्ञात कीजिए।

$$2\frac{1}{2}$$

5. निम्नलिखित में से कौन-से कथन सत्य हैं और कौन-से
कथन असत्य हैं ? अपने उत्तर की पुष्टि के लिए, एक
संक्षिप्त उपपत्ति या एक प्रतिउदाहरण दीजिए। $5 \times 2 = 10$

(क) यदि $P(x)$ एक वास्तविक बहुपद है, जिसका
एक मूल $z \in \mathbf{C}$ है, तो $P(x)$ का \bar{z} भी एक
मूल होगा। 2

(ख) यदि

$$A = \{x \in \mathbf{R} \mid 0 \leq x \leq 1\} \text{ और}$$

$$B = \{x \in \mathbf{R} \mid 1 \leq x \leq 3\},$$

है, तो $A \Delta B = [0, 1) \cup (1, 3]$ है।

(ग) यदि $a, b \in \mathbf{R}$, $a^2 + b^2 = 1$ और $x^2 + y^2 = 1$

है, तो $ax + by < 1$ होगा। 2

(घ) किसी $z \in \mathbf{C}$ के लिए $\text{Arg}(z) = \text{Arg}(\bar{z})$ होता

है। 2

(ङ) यदि A और B समष्टीय समुच्चय X के

उपसमुच्चय हैं, तो $A \times B = B \times A$ होता है। 2

MTE-05**BACHELOR'S DEGREE PROGRAMME
(BDP)****Term-End Examination****December, 2023****MTE-05 : ANALYTICAL GEOMETRY***Time : $1\frac{1}{2}$ Hours**Maximum Marks : 25*

***Note :** Question No. 1 is compulsory. Answer any **three** questions from Question Nos. 2 to 5.
Use of calculator is not allowed.*

1. Which of the following statements are true and which are false ? Justify your answers : 10
 - (i) If $\frac{2}{5}, x$ and $-\frac{1}{5}$ are the direction cosines of a line, then $x = \frac{4}{5}$.
 - (ii) The tangent plane to a cone must pass through the origin.

- (iii) Under a rotation of the axes through $\frac{\pi}{2}$, an ellipsoid becomes a sphere.
- (iv) Non-degenerate conics are non-central.
- (v) The curve $xy^2 + yx^2 = 0$ is symmetric about the origin.
2. (a) Consider a point P on a parabola $y^2 = 4ax$. Let the normal at P intersect the x -axis at Q. Draw a line at Q perpendicular to the above normal. Show that this line intersects the parabola $y^2 + 4a(x - 2a) = 0$.
- 3
- (b) Check whether or not the planes
- $$7x + 4y - 4z + 30 = 0$$
- $$12x - 17y + 4z = 3$$
- $$14x - 8z = 12 - 8y$$
- and $36x = 51y - 12z$
- can form 4 faces of a cuboid. 2
3. (a) Find the equation of the straight line $2x + y = 5$ obtained after rotating the axes through 45° . 2

- (b) Find the equation of the cylinder whose base curve is : 3

$$x^2 + y^2 + z^2 = 16$$

$$x - y + z = 6$$

4. Reduce the equation :

$$7x^2 + 18x - 6z = 2y^2 - 12xy - 14y$$

to its standard form. Hence, identify the conic it represents. 5

5. (a) Obtain the intersections of the conicoid,

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} - \frac{z^2}{16} = -1$$

with each of the coordinate planes. Hence give a rough sketch of the conicoid. 3

- (b) Reduce the following equation to cartesian form. Then identify the curve it represents : 2

$$2r^2(1 - \sin 2\theta) + r \cos \theta = 0.$$

MTE-05

स्नातक उपाधि कार्यक्रम (बी. डी. पी.)

सत्रांत परीक्षा

दिसम्बर, 2023

एम.टी.ई.-05 : वैश्लेषिक ज्यामिति

समय : $1\frac{1}{2}$ घण्टे

अधिकतम अंक : 25

नोट : प्रश्न सं. 1 करना अनिवार्य है। प्रश्न सं. 2 से 5 तक किन्हीं तीन प्रश्नों के उत्तर दीजिए। कैल्कुलेटरों के प्रयोग की अनुमति नहीं है।

1. निम्नलिखित कथनों में से कौन-से कथन सत्य और कौन-से असत्य हैं ? अपने उत्तरों की पृष्टि कीजिए :

10

- (i) यदि $\frac{2}{5}, x$ और $-\frac{1}{5}$ एक रेखा की दिक्कोज्याएँ हैं, तो $x = \frac{4}{5}$ है।

- (ii) एक शंकु का स्पर्श तल हमेशा मूलबिन्दु से गुजरता है।
- (iii) अक्षों को $\frac{\pi}{2}$ से घुमाने पर एक दीर्घवृत्तज एक गोला बन जाता है।
- (iv) अनअपभ्रष्ट शांकव अकेंद्रीय होते हैं।
- (v) वक्र $xy^2 + yx^2 = 0$ मूलबिन्दु के सापेक्ष सममित है।
2. (क) एक परवलय $y^2 = 4ax$ पर एक बिन्दु P लीजिए। मान लीजिए P पर अभिलंब x -अक्ष को Q पर काटता है। उपर्युक्त अभिलंब के लंबवत Q पर एक रेखा खींचिए। दिखाइए कि यह रेखा परवलय $y^2 + 4a(x - 2a) = 0$ को प्रतिच्छेद करती है। 3
- (ख) जाँच कीजिए कि समतल

$$7x + 4y - 4z + 30 = 0$$

$$12x - 17y + 4z = 3$$

$$14x - 8z = 12 - 8y$$

और $36x = 51y - 12z$

किसी घनाभ के 4 फलकों को निरूपित कर सकते हैं या नहीं। 2

3. (क) सरल रेखा $2x + y = 5$ का वह समीकरण ज्ञात कीजिए जो अक्षों को 45° से घुमाने के बाद प्राप्त होता है। 2

(ख) उस बेलन का समीकरण ज्ञात कीजिए जिसका आधार वक्र $x^2 + y^2 + z^2 = 16$, $x - y + z = 6$ है। 3

4. समीकरण

$$7x^2 + 18x - 62 = 2y^2 - 12xy - 14y$$

को इसके मानक रूप में समानीत कीजिए। इस तरह, इसके द्वारा निरूपित शांकव को पहचानिए। 5

5. (क) शांकवज $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} - \frac{z^2}{16} = -1$ का प्रत्येक निर्देशांक तल के साथ प्रतिच्छेद ज्ञात कीजिए। इस प्रकार, इस शांकवज का एक स्थूल आरेख दीजिए। 3

(ख) निम्नलिखित समीकरण को कार्तीय रूप में समानीत कीजिए। तब इसके द्वारा निरूपित वक्र को पहचानिए : 2

$$2r^2(1 - \sin 2\theta) + r \cos \theta = 0$$