MTE-14

BACHELOR'S DEGREE PROGRAMME (BDP)

Term-End Examination

December, 2022

ELECTIVE COURSE : MATHEMATICS

MTE-14 : MATHEMATICAL MODELLING

Time : 2 hours *Maximum Marks : 50*

(Weightage : 70%)

Note : *Attempt any* ***five*** *questions. All questions carry equal marks. Use of calculators is* ***not*** *allowed. Symbols have their usual meanings.*

---

1. (a) Using dimensional analysis, write the expressions for each of the following situations :

(i) The hydrostatic pressure P of blood, where P is a product of blood density ρ, height h of the blood column between the heart and some lower point in the body and gravity g.

(ii) The force F opposing the fall of raindrops through the air, assuming that F is the product of viscosity μ, velocity v and the diameter r of the raindrop, neglecting density. *5*

(b) A particle is projected vertically upwards with a velocity u m/s and after t seconds another particle is projected upward from the same point and with the same velocity. Prove that the particles will meet at a height $\dfrac{4u^2 - g^2t^2}{8g}$ meters after a time $\left(\dfrac{t}{2} + \dfrac{u}{g}\right)$ seconds from the start. *5*

2. (a) In a perfectly competitive market with supply and demand functions as $S(p) = \dfrac{-p^2 + 13}{3}$ and $D(p) = -p + 5$ respectively, find the equilibrium price and determine whether the prices are stable using static criterion of Walras. *4*

(b) Suppose that the quarterly sales for houses in a city were 2682, 2462 and 3012 respectively. Use exponential smoothing based upon the first three observations to forecast for the fifth period using $\alpha = \beta = 0{\cdot}2$, where α and β are smoothing constants. From the past data prior to the three data point, a straight line was fit. The value on the straight line corresponding to the last observed time is 2988 and slope is 80. *6*

3. (a) The population of birds in a park has been stable for some time. Prior to this situation the population changed from initially relatively high level. When the population was 5000, the proportionate birth rates and death rates were 20% and 60% respectively. When the population was 4000, the proportionate birth rates and death rates were 30% and 50% respectively.

If the shooting of birds is allowed at a rate of 10% of population per year, show that the above predicts population growth according to the logistic model and find the stable population size. *6*

(b) Find the greatest distance a stone can be thrown inside a horizontal tunnel 10 m high with a velocity of projectile 80 m/s. *4*

4. (a) The model for the number of infectives y of a population affected by the spread of a non-fatal disease results in a differential equation

$$\frac{dy}{dt} = y\,(N\beta - \gamma - \beta y), \;\; y(0) = y_0,$$

where N is the total population, y_0 the initial infected population, γ the recovery rate and β the contact rate (with N, y_0, γ and β being constants). Solve for y and show that epidemic converges exponentially to the stable state. *4*

(b) Let the return of three securities be given by : $\bar{r}_1 = 20\%$, $\bar{r}_2 = 25\%$ and $\bar{r}_3 = 15\%$, where $\sigma_1 = 4$, $\sigma_2 = 5$, $\sigma_3 = 6$, $\sigma_{12} = \sigma_{13} = 15$ and $\sigma_{23} = -10$. Find the standard deviation σ_P of the portfolio $P = (0{\cdot}5, 0{\cdot}4, 0{\cdot}3)$. *4*

(c) Find the escape velocity and acceleration due to gravity on the moon, where

mass of moon $= 7{\cdot}35 \times 10^{22}$ kg

radius of moon $= 1{\cdot}738 \times 10^{6}$ m and

universal gravitational constant

$G = 6{\cdot}67 \times 10^{-11}$ m^3/kg. *2*

5. (a) A particle executes SHM. If, when at distances of 3 cm and 4 cm from mean position, its velocities are 8 cm/s and 6 cm/s, find the time period and maximum acceleration. *3*

(b) In a mall, customers arrive according to the Poisson distribution at an average rate of 6 customers per hour. The mall's waiting room can accommodate a maximum of 5 customers. The service time per customer is an exponential distribution with mean rate of 12 per hour.

Find :

(i) Effective arrival rate of customers at the mall.

(ii) Probability that an arriving customer has not to wait.

(iii) The probability that an arriving customer will find a vacant seat in the waiting room. *4*

(c) Find the range of values of p and q which will render the entry (2, 2) a saddle point for the following game : *3*

Player A

Player B	2	4	5
	10	7	q
	4	p	6

6. (a) Consider a disease which is lethal to all those contracting it. All removals are in fact deaths. The disease is also sufficiently virulent to suppress any live births amongst circulating infectives. New susceptible births arise solely from the susceptible group itself. If μ is per capita birth rate, then basic differential equations of the model are :

$$\frac{dx}{dt} = x(\mu - \beta y) \text{ and } \frac{dy}{dt} = (\beta x - \gamma)\, y,$$

where β and γ are rates of infection and removal respectively. Examine stability of the steady state and show that the epidemic cycles consist of undamped simple harmonic waves of periodic time $(2\pi/\sqrt{\gamma\mu})$. *5*

(b) The heat-emission rate associated with a stack gas is 3500 kJ/s, the wind and stack gas speeds are 4 and 12 m/s respectively and the stack (inside) diameter at the top is 2·5 m. Estimate the plume rise by means of the Moses and Carson formula. *3*

(c) An investor has two possible strategies : buy conservative blue chip or buy highly speculative stocks. There are two states of nature : the market goes up or the market goes down. The following pay-off matrix show the net amounts we will have under the various circumstances :

		Market	
		Market up	Market down
Investor	Buy Blue-chip	₹ 30,000	₹ 25,000
	Buy speculative	₹ 40,000	₹ 15,000

What is the best strategy, if the probability of a market rise is 0·2 ? *2*

7. (a) Find the critical point of the system

$$\frac{dx}{dt} = y, \ \frac{dy}{dt} = -x$$

and discuss its nature and stability. Also find the general solution of the system. *4*

(b) A satellite is orbiting the Earth in a circular orbit at an altitude of approximately 900 km. Estimate its velocity and time period, when the radius of Earth may be taken as 64000 km. *6*

स्नातक उपाधि कार्यक्रम
(बी.डी.पी.)
सत्रांत परीक्षा
दिसम्बर, 2022

ऐच्छिक पाठ्यक्रम : गणित
एम.टी.ई.-14 : गणितीय निदर्शन

समय : 2 घण्टे *अधिकतम अंक : 50*
(कुल का : 70%)

नोट : *किन्हीं **पाँच** प्रश्नों के उत्तर दीजिए । सभी प्रश्नों के अंक समान हैं । कैल्कुलेटरों का प्रयोग करने की अनुमति **नहीं** है । प्रतीकों के अपने सामान्य अर्थ हैं ।*

---

1. (क) विमीय विश्लेषण का प्रयोग करते हुए, निम्नलिखित प्रत्येक स्थिति के लिए व्यंजक लिखिए :

(i) रक्त का द्रवस्थैतिक दाब P, जहाँ P रक्त घनत्व ρ, हृदय और शरीर में किसी निम्न बिंदु के बीच रक्त स्तंभ की ऊँचाई h और गुरुत्व g का गुणनफल है ।

(ii) वायु के माध्यम से गिरती हुई वर्षा की बूँदों का विरोध कर रहा बल F है । मान लीजिए कि F बूँद की श्यानता μ, वेग v और बूँद के व्यास r का गुणनफल है । घनत्व की उपेक्षा कीजिए । *5*

(ख) एक कण को u m/s के वेग से ऊर्ध्वाधरत: ऊपर की ओर फेंका गया और t सेकण्ड के बाद उसी बिंदु से तथा उसी वेग से एक दूसरे कण को भी ऊपर की ओर फेंका गया । सिद्ध कीजिए कि दोनों कण एक-दूसरे से फेंके जाने के $\left(\frac{t}{2}+\frac{u}{g}\right)$ सेकण्ड समय बाद ऊँचाई $\frac{4u^2 - g^2t^2}{8g}$ मीटर पर मिलेंगे । *5*

2. (क) एक पूर्ण प्रतियोगी बाजार के लिए पूर्ति और माँग फलन क्रमश: $S(p) = \frac{-p^2 + 13}{3}$ तथा $D(p) = -p + 5$ हैं । संतुलन कीमत ज्ञात कीजिए और वालरस के स्थैतिक निकष के अनुसार कीमतों के स्थायित्व का निर्धारण कीजिए । *4*

(ख) मान लीजिए एक शहर में मकानों की तिमाही बिक्रियाँ क्रमश: 2682, 2462 और 3012 थीं । ऊपर दिए गए प्रथम तीन प्रेक्षणों पर आधारित चरघातांकीय मसृणीकरण से पाँचवीं अवधि की बिक्री का पूर्वानुमान लगाइए जहाँ $\alpha = \beta = 0{\cdot}2$ (α, β मसृणीकरण अचर हैं ।) पिछले आँकड़ों (तीन आँकड़ों बिन्दुओं से पहले) से एक सरल रेखा आसंजित की गई है । अंतिम प्रेक्षित समय की संगत रेखा पर मान 2988 और प्रवणता 80 है । *6*

3. (क) एक पार्क में पक्षियों की समष्टि कुछ समय के लिए स्थायी थी । इस स्थिति से पहले, समष्टि प्रारंभिकत: सापेक्षत: उच्च तल से परिवर्तित हुई है । जब समष्टि 5000 थी, तो आनुपातिक जन्म दर 20% और मृत्यु दर 60% थी । जब समष्टि 4000 थी, तब आनुपातिक जन्म दर 30% और मृत्यु दर 50% थी ।

अब यदि समष्टि में 10% की प्रति वर्ष दर से पक्षियों के शिकार करने की अनुमति हो, तो दर्शाइए कि वृद्धिघात निदर्श के अनुसार समष्टि में वृद्धि होती है और स्थायी समष्टि का आमाप ज्ञात कीजिए । *6*

(ख) वह अधिकतम दूरी ज्ञात कीजिए जहाँ तक एक 10 m ऊँचाई की क्षैतिज सुरंग के अंदर एक पत्थर को 80 m/s प्रक्षेप्य वेग के साथ फेंका जा सकता है । *4*

4. (क) अघातक बीमारी के फैलने से प्रभावित होने वाली समष्टि में y संक्रामक व्यक्तियों की निदर्श अवकल समीकरण $\frac{dy}{dt} = y\,(N\beta - \gamma - \beta y),\ y(0) = y_0$ है, जहाँ N कुल समष्टि, y_0 प्रारम्भिक संक्रमित समष्टि, γ ठीक होने की दर और β संपर्क दर सभी अचर हैं । y के लिए हल प्राप्त कीजिए और दिखाइए कि स्थायित्व अवस्था के प्रति महामारी चरघातांकीय रूप से अभिसरित होती है । *4*

(ख) मान लीजिए कि तीन प्रतिभूतियों के प्रतिफल निम्नलिखित हैं :

$\bar{r}_1 = 20\%$, $\bar{r}_2 = 25\%$ और $\bar{r}_3 = 15\%$, जहाँ $\sigma_1 = 4$, $\sigma_2 = 5$, $\sigma_3 = 6$, $\sigma_{12} = \sigma_{13} = 15$ और $\sigma_{23} = -10$ है । पोर्टफोलियो $P = (0{\cdot}5, 0{\cdot}4, 0{\cdot}3)$ का मानक विचलन σ_P ज्ञात कीजिए । *4*

(ग) चंद्रमा के गुरुत्वाकर्षण के कारण पलायन वेग और त्वरण ज्ञात कीजिए जहाँ

चंद्रमा का द्रव्यमान $= 7{\cdot}35 \times 10^{22}$ kg

चंद्रमा की त्रिज्या $= 1{\cdot}738 \times 10^{6}$ m और

G का सार्वत्रिक गुरुत्वीय स्थिरांक

$= 6{\cdot}67 \times 10^{-11}$ m^3/kg है । *2*

5. (क) एक कण सरल आवर्त गति प्रदर्शित करता है । माध्य अवस्था से जब कण की दूरी 3 cm और 4 cm है, तो उसका वेग क्रमशः 8 cm/s और 6 cm/s है । आवर्तकाल और अधिकतम त्वरण ज्ञात कीजिए । *3*

(ख) एक मॉल में, उपभोक्ता प्वासों बंटन के अनुसार 6 उपभोक्ता प्रति घंटे की औसत दर से आते हैं । मॉल के प्रतीक्षा कक्ष में अधिकतम 5 उपभोक्ता बैठ सकते हैं । प्रत्येक उपभोक्ता के साथ लगने वाला समय 12 उपभोक्ता प्रति घंटा की औसत दर से चरघातांकीय बंटन है ।

निम्नलिखित ज्ञात कीजिए :

(i) मॉल में उपभोक्ताओं के आने की प्रभावी आगमन दर ।

(ii) इस बात की प्रायिकता कि आने वाले उपभोक्ता को प्रतीक्षा न करनी पड़े ।

(iii) इस बात की प्रायिकता कि आने वाले उपभोक्ता को प्रतीक्षा कक्ष में खाली सीट मिल जाए । *4*

(ग) p व q के वह परिसर मान ज्ञात कीजिए जिनके लिए निम्नलिखित खेल में पद (2, 2) एक पल्याण बिंदु होगा : *3*

खिलाड़ी A

	2	4	5
खिलाड़ी B	10	7	q
	4	p	6

6. (क) एक बीमारी उन सभी के लिए घातक है जो भी इसके सम्पर्क में आते हैं । सभी बीमार मृत्यु तक पहुँचते हैं । यह बीमारी परिसंचारी संक्रमितों के बीच किसी भी जीवित जन्म को दबाने के लिए पर्याप्त रूप से विषैली होती है । नए सुग्राही जन्म केवल सुग्राही समूहों से ही हो सकते हैं । यदि μ प्रति व्यक्ति जन्म दर है, तो निदर्श के मूल अवकल समीकरण निम्नलिखित हैं :

$$\frac{dx}{dt} = x(\mu - \beta y) \text{ और } \frac{dy}{dt} = (\beta x - \gamma)y$$

जहाँ β और γ क्रमशः संक्रमण और बचाव दरें हैं । स्थिर अवस्था के स्थायित्व का परीक्षण कीजिए और दर्शाइए कि महामारी के चक्र अनडैम्प्ड सरल आवर्त तरंगों में हैं जिनका आवर्ती काल $(2\pi/\sqrt{\gamma\mu})$ है । 5

(ख) स्टैक गैस से संबंधित ऊष्मा उत्सर्जन दर 3500 kJ/s है, पवन चाल और स्टैक गैस चाल क्रमशः 4 और 12 m/s हैं और ऊपरी सिरे पर स्टैक गैस का अंतः व्यास 2·5 m है । मोसेज और कार्सन सूत्र की सहायता से पिच्छक उत्थान आकलित कीजिए । 3

(ग) एक निवेशक के पास दो संभव युक्तियाँ हैं : या तो संरक्षी ब्लू चिप स्टॉक खरीदे या अति सट्टा स्टॉक खरीदे । प्रकृति की दो अवस्थाएँ हैं : या तो बाजार चढ़ जाता है या बाजार गिर जाता है । निम्नलिखित भुगतान आव्यूह में वे नेट धनराशियाँ दिखाई गई हैं जो कि विभिन्न परिस्थितियों में उसके पास रहती हैं :

		बाजार	
		बाजार का चढ़ना	बाजार का गिरना
निवेशक	ब्लू-चिप खरीदता है	₹ 30,000	₹ 25,000
	सट्टा स्टॉक खरीदता है	₹ 40,000	₹ 15,000

यदि बाजार चढ़ने की प्रायिकता 0·2 हो, तो सर्वोत्तम युक्ति क्या होगी ? 2

7. (क) निम्नलिखित निकाय का क्रांतिक बिंदु ज्ञात कीजिए :

$$\frac{dx}{dt} = y, \quad \frac{dy}{dt} = -x$$

क्रांतिक बिंदु के प्रकार (प्रकृति) और स्थायित्व की चर्चा कीजिए । निकाय का व्यापक हल भी ज्ञात कीजिए । *4*

(ख) एक उपग्रह लगभग 900 km की ऊँचाई पर पृथ्वी के गोलाकार चक्कर लगा रहा है । यदि पृथ्वी की त्रिज्या 64000 km है, तो इसका प्रत्याशित वेग और आवृत्ति समय (समयावधि) निकालिए । *6*