No. of Printed Pages : 11 **MTE-10**

# BACHELOR'S DEGREE PROGRAMME

# (BDP)

## Term-End Examination

## December, 2022

### MTE-10 : NUMERICAL ANALYSIS

*Time : 2 Hours* *Maximum Marks : 50*

---

***Note :*** *Attempt any **five** questions. All computations may be done upto 3 decimal places. Use of calculators is not allowed. Symbols have their usual meanings.*

---

1. (a) Using three iterations of the inverse power method, find the eigen value nearest to 6 of the matrix $\begin{bmatrix} 1 & 6 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$.

Also find the corresponding eigen vector. Assume the initial approximation to the eigen vector as $r^{(0)} = [1, 1]^{T}$. 5

(b) Using the third order classical Runge-Kutta method, solve the initial value problem :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y + 2x}{y + 3x}, y(1) = 2$$

Find $y(1.2)$, taking $h = 0.2$. 5

2. (a) Use the LU decomposition method to solve the system of linear equations : 5

$$x_1 + x_2 + x_3 = 1$$

$$4x_1 + 3x_2 - x_3 = 6$$

$$3x_1 + 5x_2 + 3x_3 = 4$$

(b) Find the interpolating polynomial that fits the data :

| $x$ | $f(x)$ |
|---|---|
| – 2 | – 15 |
| – 1 | – 4 |
| 1 | 0 |
| 3 | 20 |

Also interpolate $f(0)$. 5

3. (a) The solution of the system of equations :

$$3x - 6y + 2z = 23$$

$$-4x + y - z = -15$$

$$x - 3y + 7z = 16$$

is being attempted by the Jacobi iteration method with a given initial vector. Find the iteration matrix. Hence determine whether the method converges or not. 6

(b) Determine a unique polynomial $f(x)$ of degree at most 3 such that :

$$f(x_0) = 1, f'(x_0) = -1$$

$$f(x_1) = 2, f'(x_1) = 0$$

where $x_1 - x_0 = h$. 4

4. (a) Prove that : 3

$$\mu^2 = 1 + \frac{\delta^2}{4}$$

(b) To find an approximate value of $2^{\frac{1}{4}}$, use Newton-Raphson method. Starting with $x_0 = 1$, perform two iterations only. 3

(c) Using the Taylor's series method of second order, find the approximate value of $y(0.4)$ for the IVP

$$y' = x^2 - y^2,: y(0) = 1.$$

Take the step size $h = 0.2$. 4

5. (a) Find the number where the method :

$$x_{n+1} = \frac{1}{8}\left[6x_n + \frac{3\alpha}{x_n} - \frac{x_n^3}{\alpha}\right], n = 0, 1, \ldots..,$$

converges. Here $\alpha > 0$. 4

(b) Find the interval of unit length which contains the smallest positive root of the equation $x^3 - 2x - 10 = 0$. Using the midpoint of this interval as an initial approximation, perform two iterations of the Berge-Vieta method. 6

6. (a) Estimate the eigen values of the following matrix using Gershgorin bounds : 4

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & -1 \\ 2 & 5 & 2 \\ 3 & 4 & 2 \end{bmatrix}$$

(b) Using Gauss–Jordan method, find the inverse of the matrix : 6

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

7. (a) Evaluate the integral

$$\int_0^2 \frac{1}{x+2}\,dx$$

using Trapezoidal rule with 5 subintervals. 4

(b) Let :

$$w(x) = \prod_{k=0}^{n} (x - x_k).$$

Show that the interpolating polynomial of degree at most $n$ with the nodes $x_0, x_1, \ldots\ldots., x_n$ can be written as : 6

$$P_n(x) = w(x) \sum_{k=0}^{n} \frac{f(x_k)}{(x - x_k)\, w'(x_k)}$$

# MTE-10

## स्नातक उपाधि कार्यक्रम ( बी. डी. पी. )

## सत्रांत परीक्षा

## दिसम्बर, 2022

## एम. टी. ई.-10 : संख्यात्मक विश्लेषण

*समय : 2 घण्टे* *अधिकतम अंक : 50*

---

***नोट :*** *किन्हीं* ***पाँच*** *प्रश्नों के उत्तर दीजिए। सभी अभिकलन 3 दशमलव स्थानों तक निकटित कर सकते हैं। कैल्कुलेटरों के प्रयोग की अनुमति नहीं है। प्रतीकों के अपने सामान्य अर्थ हैं।*

1. (क) व्युत्क्रम घात विधि की तीन पुनरावृत्तियाँ करके, आव्यूह $\begin{bmatrix} 1 & 6 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$ का 6 के निकटतम आइगेन मान ज्ञात कीजिए। साथ ही, संगत आइगेन सदिश भी ज्ञात कीजिए। आइगेन सदिश का प्रारंभिक सन्निकटन $r^{(0)} = [1,1]^T$ ले लीजिए। 5

   (ख) तृतीय कोटि चिरप्रतिष्ठित रुंगे-कुट्टा विधि का प्रयोग करके, आदिमान समस्या :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y + 2x}{y + 3x}, y(1) = 2$$

   को हल कीजिए। $h = 0.2$ लेकर $y(1.2)$ ज्ञात कीजिए। 5

2. (क) LU वियोजन विधि का प्रयोग करके रैखिक समीकरण निकाय :

$$x_1 + x_2 + x_3 = 1$$
$$4x_1 + 3x_2 - x_3 = 6$$
$$3x_1 + 5x_2 + 3x_3 = 4$$

   को हल कीजिए। 5

(ख) आँकड़ों

| $x$ | $f(x)$ |
|---|---|
| –2 | –15 |
| –1 | – 4 |
| 1 | 0 |
| 3 | 20 |

को सामंजित करने वाला अंतर्वेशी बहुपद ज्ञात कीजिए। साथ ही, $f(0)$ का मान आकलित कीजिए। 5

3. (क) समीकरण निकाय :

$$3x - 6y + 2z = 23$$
$$-4x + y - z = -15$$
$$x - 3y + 7z = 16$$

को किसी दिए हुए प्रारंभिक सदिश के साथ जैकोबी पुनरावृत्ति विधि से हल करने का प्रयास किया जाता है। पुनरावृत्ति आव्यूह ज्ञात कीजिए। इस प्रकार, निर्धारित कीजिए कि विधि अभिसरित होती है या नहीं। 6

(ख) घात अधिकतम 3 वाला वह अद्वितीय बहुपद $f(x)$ ज्ञात कीजिए जिसके लिए

$$f(x_0) = 1, f'(x_0) = -1$$

$$f(x_1) = 2, f'(x_1) = 0$$

हो, जहाँ $x_1 - x_0 = h$ है। 4

4. (क) सिद्ध कीजिए कि : 3

$$\mu^2 = 1 + \frac{\delta^2}{4}$$

(ख) $2^{\frac{1}{4}}$ का सन्निकट मान ज्ञात करने के लिए न्यूटन–रैफ्सन विधि का प्रयोग कीजिए। $x_0 = 1$ से शुरू करके, केवल दो पुनरावृत्तियाँ दीजिए। 3

(ग) द्वितीय कोटि की टेलर श्रेणी विधि का प्रयोग करके IVP :

$$y' = x^2 - y^2, y(0) = 1$$

से $y(0.4)$ का सन्निकट मान ज्ञात कीजिए। पग लम्बाई $h = 0.2$ लीजिए। 4

5. (क) वह संख्या ज्ञात कीजिए जहाँ विधि :

$$x_{n+1} = \frac{1}{8}\left[6x_n + \frac{3\alpha}{x_n} - \frac{x_n^3}{\alpha}\right], n = 0, 1, \ldots..,$$

अभिसरित होती है। यहाँ $\alpha > 0$ है। 4

(ख) इकाई लम्बाई वाला वह अंतराल ज्ञात कीजिए जिसमें समीकरण $x^3 - 2x - 10 = 0$ का न्यूनतम धन मूल हो। इस अंतराल के मध्यबिंदु को प्रारंभिक सन्निकटन मानकर, बर्ज–विएटा विधि की दो पुनरावृत्तियाँ दीजिए। 6

6. (क) गर्सगोरिन परिबंधों का प्रयोग करके निम्नलिखित आव्यूह के आइगेन मानों का आकलन कीजिए :4

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & -1 \\ 2 & 5 & 2 \\ 3 & 4 & 2 \end{bmatrix}$$

(ख) गाउस–जॉर्डन विधि का प्रयोग करके आव्यूह :

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

का व्युत्क्रम ज्ञात कीजिए। 6

7. (क) 5 उप–अंतराल लेकर समलंबी नियम से समाकल

$$\int_0^2 \frac{1}{x+2}\, dx$$

का मान ज्ञात कीजिए। 4

(ख) मान लीजिए $w(x) = \prod_{k=0}^{n} (x - x_k)$ है। दिखाइए कि बिन्दुओं $x_0, x_1, ......., x_n$ पर घात अधिकतम $n$ वाले अंतर्वेशी बहुपद को

$$P_n(x) = w(x) \sum_{k=0}^{n} \frac{f(x_k)}{(x - x_k)\, w'(x_k)}$$

के रूप में लिखा जा सकता है। 6