No. of Printed Pages : 11 **MTE-06**

BACHELOR'S DEGREE PROGRAMME (BDP)

Term-End Examination

December, 2022

MTE-06 : ABSTRACT ALGEBRA

Time : 2 Hours *Maximum Marks : 50*

Note : *(i) Attempt **five** questions in all.*

*(ii) Question No. **7** is **compulsory**.*

*(iii) Answer any **four** questions from Q. Nos. **1** to **6**.*

(iv) Use of calculator is not allowed.

1. (a) Define an equivalence relation on a set. Check whether the relation '~' defined by $a \sim b$ if $|a| = |b|$ is an equivalence relation on the set of real numbers. 2

(b) Define normal subgroup of a group. Check whether {1, (1 2)} is a normal subgroup of S_3. 2

(c) Define nilpotent element in a ring. Check whether $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ is a nilpotent element in $M_2(\mathbf{R})$. 2

(d) Define an irreducible polynomial in K [x], where K is a field. Is $x^2 + 1$ irreducible in **C** [x] ? Justify your answer. 2

(e) Define the generator element of a cyclic group. Give a generator for $\mathbf{Z}_5^*$. 2

2. (a) Define a Sylow-p subgroup of a finite group G for a prime p dividing the order of G. What is the order of the Sylow-3 subgroup of $\mathbf{Z}_{36}$? 2

(b) Define a unit element in a commutative ring with unity. Check whether $1 + \sqrt{2}$ is a unit element in the ring $\mathbf{Z}[\sqrt{2}] = \{a + b\sqrt{2}\}, a, b \in \mathbf{Z}$. 2

(c) Define an ideal in a ring. Check whether $I = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ a & 0 \end{pmatrix} \mid a \in \mathbf{R} \right\}$ is an ideal in $R = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & c \end{pmatrix} \mid a, b, c \in \mathbf{R} \right\}$. 3

(d) Define the order of an element of finite order in a group. Find the order of the elements $\overline{2}$ and $\overline{6}$ in $\mathbf{Z}_7^*$. 3

3. (a) Find the remainder of 37^{49} when divided by 7. 2

(b) Let $S = \mathbf{R} \setminus \{-1\}$. Define an operation $\oplus$ on S by $x \oplus y = x + y + xy,\ x, y \in S$. Show that $(S, \oplus)$ is an abelian group. Find a solution of the equation $1 \oplus x = 2$ in S. 5

(c) Express the permutation :

$$f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 8 & 6 & 7 & 4 & 1 & 5 & 2 \end{pmatrix}$$

first as a product of disjoint cycles and then as a product of transpositions. What is the signature of f ? 3

4. (a) Let $R = \left\{ a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbf{Z} \right\}$ and $S = \left\{ \begin{pmatrix} a & 2b \\ b & a \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbf{Z} \right\}$. Show that $\theta : R \to S$ defined by

$\theta(a + b\sqrt{2}) = \begin{bmatrix} a & 2b \\ b & a \end{bmatrix}$ is an isomorphism of rings. 4

(b) If G is a finite abelian group of order n and if a prime p divides n, show that G has a unique Sylow-p subgroup. Does any finite non-abelian group G have a unique Sylow-P subgroup for each prime p dividing the order of G ? Justify your answer. 4

(c) Check whether $\overline{3}$ is a zero divisor in $\mathbf{Z}_8$. 2

5. (a) (i) Let $f : \mathrm{R} \to \mathrm{S}$ be an onto ring homomorphism. Show that if I is an ideal of R, then f [I] is an ideal of S. 2

(ii) If f were not onto, would f [I] still be an ideal of S ? Give reasons for your answer. 2

(b) Prove that $\mathbf{Z}[\sqrt{-3}]$ is not a UFD by giving with justification two different factorisations of 4 as product of irreducible elements. 4

(c) Show that, if $f : \mathrm{R} \to \mathrm{S}$ is a homomorphism between commutative rings with unity and P is a prime ideal in S, $f^{-1}(\mathrm{P})$ is a prime ideal in R. 2

6. (a) State Eisenstein's criterion. Apply it to check if $R = \dfrac{Q[x]}{\langle x^3 + 3x + 6 \rangle}$ is a field or not. If R is a field, obtain its characteristic. Otherwise field a field containing R. Further give two distinct elements of R. 6

(b) Let G and H be groups of order 17 and 29, respectively. Let $f : G \to H$ be a homomorphism. Show that $f(x) = e \ \forall \ x \in G$, where e is the identity element of H. 4

7. State whether the following statements are true *or* false. Justify your answer with a short proof or a counter-example : 5×2=10

(a) If $f, g : A \to A$ are mappings such that $f \circ g$ is onto, then f is onto.

(b) If R is an integral domain, then so is R × R.

(c) If p and q are distinct prime numbers and G is a group of order pq, then G is cyclic.

(d) Every nilpotent element in a ring is a zero divisor.

(e) If G is an infinite group and H is its subgroup, then [G : H] is infinite.

MTE-06

स्नातक उपाधि कार्यक्रम (बी. डी. पी.)

सत्रांत परीक्षा

दिसम्बर, 2022

एम.टी.ई.-06 : अमूर्त बीजगणित

समय : 2 घण्टे *अधिकतम अंक : 50*

नोट : *(i) कुल* ***पाँच*** *प्रश्नों के उत्तर दीजिए।*

(ii) प्रश्न सं. 7 करना जरूरी है।

(iii) प्रश्न क्र. 1 से 6 तक किन्हीं ***चार*** *प्रश्नों के उत्तर दीजिए।*

(iv) कैल्कुलेटर का प्रयोग करने की अनुमति नहीं है।

---

1. (क) एक समुच्चय पर तुल्यता संबंध परिभाषित कीजिए। जाँच कीजिए कि वास्तविक संख्याओं की समुच्चय पर $a \sim b$ यदि $|a| = |b|$ द्वारा परिभाषित संबंध '$\sim$' एक तुल्यता संबंध है या नहीं। 2

(ख) एक समूह का प्रसामान्य उपसमूह परिभाषित कीजिए। जाँच कीजिए कि $\{1, (1\ 2)\}$, S_3 का प्रसामान्य उपसमूह है या नहीं। 2

(ग) एक वलय में शून्यभावी अवयव परिभाषित कीजिए। जाँच कीजिए कि $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $M_2(\mathbf{R})$ में एक शून्यभावी अवयव है। 2

(घ) K $[x]$ में, जहाँ K एक क्षेत्र है, अखण्डनीय बहुपद परिभाषित कीजिए। क्या $\mathbf{C}\,[x]$ में $x^2 + 1$ अखण्डनीय है ? अपने उत्तर की पुष्टि कीजिए। 2

(ङ) एक चक्रीय समूह का जनक अवयव परिभाषित कीजिए। $\mathbf{Z}_5^*$ का एक जनक समुच्चय दीजिए। 2

2\. (क) एक परिमित समूह G की कोटि को विभाजन करने वाली अभाज्य संख्या p के लिए साइलो-p उपसमूह परिभाषित कीजिए। $\mathbf{Z}_{36}$ के साइलो-3 उपसमूह की कोटि क्या है ? 2

(ख) एक तत्समकी क्रमविनिमेय वलय में मात्रक परिभाषित कीजिए। जाँच कीजिए कि $1 + \sqrt{2}$ वलय $\mathbf{Z}[\sqrt{2}] = \{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbf{Z}\}$ में एक मात्रक अवयव है। 2

(ग) एक वलय में गुणजावली को परिभाषित कीजिए। जाँच कीजिए कि $I = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ a & 0 \end{pmatrix} \mid a \in \mathbf{R} \right\}$ वलय $R = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & c \end{pmatrix} \mid a, b, c \in \mathbf{R} \right\}$ का गुणजावली है। 3

(घ) एक समूह में परिमित कोटि के अवयव की कोटि परिभाषित कीजिए। $\mathbf{Z}_7^*$ के अव्यय $\overline{2}$ और $\overline{6}$ की कोटि निकालिए। 3

3. (क) 37^{49} को 7 से विभाजित किए जाने पर प्राप्त शेषफल क्या होगा, ज्ञात कीजिए। 2

(ख) मान लीजिए $S = \mathbf{R} \setminus \{-1\}$। सभी $x, y \in S$ के लिए $x \oplus y = x + y + xy$ द्वारा एक संक्रिया परिभाषित कीजिए। दिखाइए कि $(S, \oplus)$ एक आबेली समूह है। S में समीकरण $1 \oplus x = 2$ का हल ज्ञात कीजिए। 5

(ग) क्रमचय $f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 8 & 6 & 7 & 4 & 1 & 5 & 2 \end{pmatrix}$ को पहले असंयुक्त चक्रों के गुणनफल के रूप में और उसके बाद पक्षांतरणों के गुणनफल के रूप में व्यक्त कीजिए। 3

4. (क) मान लीजिए $R = \{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbf{Z}\}$ और $S = \left\{\begin{pmatrix} a & 2b \\ b & a \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbf{Z}\right\}$। दिखाइए कि $\theta(a + b\sqrt{2}) = \begin{bmatrix} a & 2b \\ b & a \end{bmatrix}$ द्वारा परिभाषित $\theta : R \to S$ वलयों की तुल्यकारिता है। 4

(ख) यदि G कोटि n वाला एक परिमित आबेली समूह है और यदि p, एक अभाज्य संख्या है जो n को विभाजित करती है, तो दिखाइए कि G का अद्वितीय साइलो-p उपसमूह है।

किसी गैर-आबेली समूह G के लिए G की कोटि को विभाजित करने वाली प्रत्येक अभाज्य संख्या p के लिए G का अद्वितीय साइलो-p उपसमूह होता है। अपने उत्तर की पुष्टि कीजिए। 4

(ग) जाँच कीजिए कि $\bar{3}$ वलय $\mathbf{Z}_8$ का एक शून्य का भाजक है। 2

5. (क) (i) मान लीजिए $f : R \to S$ एक आच्छादक वलय समाकारिता है। दिखाइए कि यदि I, R की गुणजावली है तब f (I), S की एक गुणजावली होगी। 2

(ii) यदि f आच्छादक नहीं होता क्या तब भी f (I) S की गुणजावली होगी ? अपने उत्तर के कारण बताइए। 2

(ख) पुष्टि सहित $\mathbf{Z}[\sqrt{-3}]$ में अखंडनीय अवयवों के गुणनफल के रूप में 4 के दो अलग-अलग गुणनखंडन देते हुए सिद्ध कीजिए कि $\mathbf{Z}[\sqrt{-3}]$ यू. एफ. डी. नहीं है। 4

(ग) दिखाइए कि यदि $f : \mathrm{R} \to \mathrm{S}$ दो तत्समकी, क्रमविनिमेय वलयों के बीच का वलय समाकारिता है और P और S में एक अभाज्य गुणजावली है, तो $f^{-1}(\mathrm{P})$ वलय R में अभाज्य गुणजावली होगी। 2

6. (क) आइजेन्स्टीन निकष का कथन दीजिए। यदि $\mathrm{R} = \dfrac{\mathrm{Q}[x]}{\langle x^3 + 3x + 6 \rangle}$ एक क्षेत्र है या नहीं, इसकी जाँच करने के लिए निकष को लागू कीजिए। यदि R क्षेत्र है, तो इसका अभिलाक्षणिक प्राप्त कीजिए। अन्यथा एक ऐसा क्षेत्र ज्ञात कीजिए जिसमें R हो। इसके आगे R के दो अलग-अलग अवयव बताइए। 6

(ख) मान लीजिए G और H कोटि क्रमशः 17 और 29 वाले समूह हैं। मान लीजिए $f : G \to H$ एक समाकारिता है। दिखाइए कि प्रत्येक $x \in G$ के लिए $f(x) = e$ है, जहाँ e H का तत्समक अवयव है। 4

7. बताइए कि निम्नलिखित कथन सत्य हैं या असत्य। अपने उत्तर की लघु उपपत्ति या प्रत्युदाहरण द्वारा पुष्टि कीजिए :

5×2=10

(क) यदि $f, g : A \to A$ ऐसे फलन हैं कि $f \circ g$ आच्छादक है, तो f आच्छादक है।

(ख) यदि R तक पूर्णांकीय प्रांत है, तो $R \times R$ भी पूर्णांकीय प्रांत है।

(ग) यदि p और q भिन्न अभाज्य संख्यएँ हैं और G कोटि pq वाला समूह है, तो G चक्रीय है।

(घ) प्रत्येक शून्यभावी अवयव शून्य का भाजक है।

(ङ) यदि G एक अनन्त समूह है और H उसका उपसमूह है, तो $[G : H]$ अनन्त है।